

INTEGRALDARSTELLUNG
MEHRFACH SUPERHARMONISCHER
FUNKTIONEN

von
Thomas Barth
aus Kleinmachnow

1977 P 296

INTEGRALDARSTELLUNG MEHRFACH SUPERHARMONISCHER FUNKTIONEN

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Thomas Barth
aus Kleinmachnow

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fach-
bereichen der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung:

20. Juli 1977

Vorsitzender der Promotionskommission:

Professor Dr. E. Schweizer

Erstberichterstatter:

Professor Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatter:

Dozent Dr. H. Leutwiler

Inhalt

	Seite
Einleitung	1
I. Produkte harmonischer Räume	11
§ 1. Mehrfach harmonische Funktionen	12
§ 2. M-resolutive Mengen	16
§ 3. Mehrfach hyperharmonische Funktionen	21
§ 4. Nahezu m-hyperharmonische Funktionen	26
§ 5. Mehrfach superharmonische Funktionen und andere Konvergenz-Eigenschaften	30
II. Integraldarstellung positiver mehrfach super- harmonischer Funktionen	40
§ 6. Reduzierte in harmonischen Räumen	41
§ 7. Reduzierte auf dem Produktraum	44
§ 8. Die $\mathcal{T}$ -Topologie auf MS_+	47
§ 9. Die Integraldarstellung	61
Symbolverzeichnis	65
Literatur	66



Digitized by the Internet Archive
in 2026

EINLEITUNG

1. Die Entwicklung der Potentialtheorie in den letzten zwanzig Jahren war bestimmt durch die axiomatische Behandlung des Dirichlet-schen Problems. Gewöhnlich geht man dabei aus von einem Garben-datum $\mathcal{H}$ stetiger reeller Funktionen, genannt harmonische Funktionen, auf einem lokal kompakten Raum X . Es wird gefordert, daß die harmo-nischen Funktionen einen Vektorraum bilden und daß es genügend viele offene, relativ kompakte Mengen gibt, nämlich eine Basis der Topologie, für die sich das Dirichletsche Problem lösen läßt: jede stetige Funktion f auf dem Rand V einer solchen Menge V läßt sich auf genau eine Weise zu einer stetigen Funktion auf $\bar{V}$ fortsetzen, die auf V harmonisch ist. Solche Mengen heißen regulär. Ferner werden eine Konvergenz-Eigenschaft und ein Minimumprinzip benötigt. Letzteres läßt sich nach einem allgemeinen Minimumprinzip von H. BAUER [4] auch über eine Trennungsforderung beweisen.

An Hand der Lösung des Dirichletschen Problems lassen sich harmonische Maße definieren, mit deren Hilfe sich die harmonischen Funktionen durch eine Mittelwert-Eigenschaft charakterisieren lassen: eine stetige Funktion ist genau dann harmonisch, wenn sie in jedem Punkt einer jeden regulären Menge gleich dem Integral ihrer Randwerte bezüglich des zugehörigen harmonischen Maßes ist.

Eine wesentliche Aufgabe der Theorie besteht nun darin, das Dirichletsche Problem für beliebige offene, relativ kompakte Mengen

zu lösen, wobei man i.a. nicht mehr fordern kann, daß die Fortsetzung in allen Punkten des Randes stetig an die vorgegebenen Randwerte anschließt. Zur Lösung kann man mit gleichem Resultat entweder die Balayage-Theorie oder die Perron-Wiener-Brelot-Methode verwenden. In beiden Fällen spielen die hyperharmonischen Funktionen, die sich durch Integral-Ungleichungen mit Hilfe der harmonischen Maße als Oberfunktionen zur obigen Mittelwert-Eigenschaft charakterisieren lassen, eine entscheidende Rolle.

Seit den Arbeiten von J.L. DOOB [16] 1956, M. BRELOT [8] 1958 und H. BAUER [5] 1962 ist die axiomatische Potentialtheorie zu einer weitreichenden Theorie ausgebaut und vervollkommen worden, die durch den Brückenschlag zur Theorie der Markoffschen Prozesse zusätzlich an Tragweite gewonnen hat.

Dabei sind auch Prozesse untersucht worden wie die gleichmäßige Bewegung eines Teilchens auf der reellen Geraden, bei denen es bezüglich der entsprechenden harmonischen Funktionen keine regulären Mengen gibt. Im genannten Fall kann man dennoch eine Basis offener Mengen angeben, für die sich das Dirichletsche Problem etwa nach der Perron-Wiener-Brelot-Methode lösen läßt. Solche Mengen heißen resolutiv. Ferner gibt es hier zu einem Garbendatum harmonischer Funktionen zwei mögliche Garbendaten hyperharmonischer Funktionen je nachdem, ob die Bewegung nach rechts oder nach links geht.

Dies hat C. CONSTANTINESCU und A. CORNEA [15] 1972 dazu geführt, bei ihrem Versuch, die Ergebnisse der modernen Potentialtheorie in einem Standardwerk zu sammeln und zu vereinheitlichen, das Garbendatum $\mathcal{H}^*$ der hyperharmonischen Funktionen und eine Basis resolutiver Mengen als Ausgangspunkt der Theorie harmonischer Räume zu wählen.

Eine weitere wichtige Aufgabe der Theorie ist die Integraldarstellung auf dem Kegel der positiven superharmonischen Funktionen. Dabei wird jede solche Funktion mit Hilfe der Sätze von G. CHOQUET [12] dargestellt durch ein positives Radonmaß auf einem Hut des Kegels, welches von den Extremalstrahlen des Kegels getragen wird und bezüglich dieses Hutes eindeutig bestimmt ist. Für die klassischen harmonischen Funktionen der Laplace-Gleichung auf einer offenen Kugel im $\mathbb{R}^n$ liefert die Poissonsche Integralformel gerade diese Darstellung, wenn man beachtet, daß sich die Extremalstrahlen des Kegels der positiven harmonischen Funktionen mit Hilfe des Poissonkerns $P(\cdot, z)$ mit den Punkten z aus dem Rand der Kugel identifizieren lassen.

Für Brelotsche harmonische Räume wurde eine Integraldarstellung positiver superharmonischer Funktionen zuerst von M. BRELOT [8] 1958 unter der zusätzlichen Annahme einer Basis vollständig determinierender regulärer Gebiete gegeben. Mit der Methode der spezifischen Multiplikation machte R.M. HERVE [22] 1962 diese Annahme überflüssig.

Einen einfacheren Zugang bietet die Methode der Reduzierten von G. MOKOBODZKI [24] von 1965.

Die Methode der spezifischen Multiplikation wurde 1965 von C. CONSTANTINESCU [13] auf allgemeinere harmonische Räume übertragen (vgl. auch [15], Ch. 11), eine Darstellung der Methode der Reduzierten von G. MOKOBODZKI für harmonische Räume im Sinne von H. BAUER [6] findet man in [3].

Wie in weiten Bereichen der axiomatischen Potentialtheorie und in allen wichtigen Anwendungen, wird zur Integraldarstellung stets eine abzählbare Basis für den harmonischen Raum X benötigt, ferner zu jedem Punkt von X die Existenz eines Potentials auf X , welches dort strikt positiv ist. Mit der letzteren Bedingung heißt X ein streng harmonischer oder $\mathcal{P}$ -harmonischer Raum.

2. Gegenstand dieser Arbeit sind harmonische und hyperharmonische Funktionen "mehrerer Veränderlicher", d.h. Funktionen auf dem cartesischen Produkt endlich vieler harmonischer Räume, die in jeder Variablen separat harmonisch bzw. hyperharmonisch sind. Sie werden mehrfach harmonisch bzw. mehrfach hyperharmonisch genannt, wenn sie zusätzlich stetig bzw. nach unten halbstetig sind auf dem Produktraum.

Da das Problem der Integraldarstellung positiver mehrfach superharmonischer Funktionen mit ähnlichen Methoden wie die ent-

sprechende Darstellung in harmonischen Räumen behandelt werden soll, muß zunächst die Frage untersucht werden, wie sich die Eigenschaften, insbesondere die Axiome der zugrundeliegenden harmonischen Räume auf den Produktraum übertragen. Diese Untersuchung ist auch für eine angemessene Definition des Begriffes der mehrfach superharmonischen Funktion von Bedeutung.

Musterbeispiel einer Theorie mehrerer Variablen ist die Theorie der holomorphen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. Sie gab auch den Anstoß zur Untersuchung separat harmonischer Funktionen. P. LELONG [23] bewies 1945, daß Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}^n$ pluriharmonisch und damit insbesondere separat harmonisch sind im Sinne der Laplace-Gleichung in jeder komplexen Variablen.

Mehrfach subharmonische Funktionen wurden zuerst von V. AVANISSIAN [1] 1961 im Rahmen der klassischen Potentialtheorie auf $\mathbb{R}^n$ untersucht. Er zeigte dabei, daß jede lokal nach oben beschränkte, separat subharmonische Funktion auf dem Produktraum nach oben halbstetig ist, was eine Kennzeichnung der mehrfach subharmonischen Funktionen bedeutet.

Für mehrfach hyperharmonische Funktionen auf dem Produkt Brelotscher harmonischer Räume bewies K. GOWRISANKARAN [19] 1966 einen entsprechenden Satz. Ferner behandelte er ein Dirichletsches

Problem für Produkte regulärer Mengen, bei dem Randwerte nur auf einem Teil des Randes, dem distinguirten Rand, vorgegeben werden dürfen, und gab eine Integraldarstellung positiver mehrfach harmonischer Funktionen. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die zugrundeliegenden harmonischen Räume eine Basis vollständig determinierender regulärer Gebiete besitzen, wurde diese Integraldarstellung von A. DRINKWATER [17] 1972 auf positive mehrfach superharmonische Funktionen ausgedehnt.

Eine solche Integraldarstellung hat eine Anzahl wichtiger Anwendungen, insbesondere in der Theorie holomorpher Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher, etwa bei K. GOWRISANKARAN [21], und in der Theorie der stochastischen Prozesse (vgl. R. CAIROLI [11]).

3. In der vorliegenden Arbeit sollen die Theorie der mehrfach hyperharmonischen Funktionen und die Integraldarstellung positiver mehrfach superharmonischer Funktionen für die allgemeineren harmonischen Räume im Sinne von C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA [15] entwickelt werden. Wesentliche Unterschiede ergeben sich dabei nicht so sehr aus dem Übergang zu einer Basis resolutiver statt regulärer Mengen, sondern aus der Verwendung des Bauerschen Konvergenzaxioms. Dem Begriff der gleichgradigen Stetigkeit fällt dabei eine entscheidende Rolle zu.

Der erste Teil der Arbeit ist der Frage gewidmet, wie sich die Eigenschaften der zugrundeliegenden harmonischen Räume auf den Produkt-

raum übertragen. Zunächst wird in § 1 ein Stetigkeitskriterium für separat harmonische Funktionen bewiesen, dann das Positivitätsaxiom und das Bauersche Konvergenzaxiom für das Garbendatum der mehrfach harmonischen Funktionen. In § 2 werden für die Mengen einer Basis des Produktraums, nämlich für Produkte resolutiver Mengen eine Art harmonischer Maße definiert, mit deren Hilfe sich die mehrfach harmonischen Funktionen durch eine Mittelwert-Eigenschaft kennzeichnen lassen. Ein Dirichletsches Problem, bei dem die Stetigkeit am Rand einbezogen wird, läßt sich hier jedoch nur für Produkte regulärer Mengen behandeln.

Entsprechend werden in § 3 die mehrfach hyperharmonischen Funktionen als Oberfunktionen zu dieser Mittelwert-Eigenschaft gekennzeichnet, was dem Vollständigkeitsaxiom harmonischer Räume entspricht. Ferner wird ein Minimumprinzip bewiesen. Das Garbendatum der mehrfach hyperharmonischen Funktionen ist jedoch nicht reichhaltig genug, um die Resolutivität der betrachteten Mengen für die Perron-Wiener-Brelot-Methode zu garantieren. Dies unterscheidet den Produktraum von einem harmonischen Raum.

Zusammen mit einer Behandlung nahezu mehrfach hyperharmonischer Funktionen wird in § 4 ein Kriterium für die Halbstetigkeit nach unten einer separat hyperharmonischen Funktion bewiesen. In § 5 werden andere Konvergenzaxiome sowie der Zusammenhang mit dem Begriff der mehrfach superharmonischen Funktion diskutiert. Es zeigt

sich, daß sich das Bauersche und das Brelotsche Konvergenzaxiom von den zugrundeliegenden harmonischen Räumen auf den Produkt-raum übertragen, während sich im Fall des Doobschen Konvergenzaxioms nur eine abgeschwächte Version beweisen läßt. Dies liegt an der Unhandlichkeit der Absorptionsmengen. In Fällen, wo die Absorptionsmengen bekannt sind, wie im Standardbeispiel der Wärmeleitungsgleichung, läßt sich jedoch auch hier eine Produkt-Invarianz zeigen.

Im zweiten Teil der Arbeit wird eine Integraldarstellung auf dem Kegel der positiven mehrfach superharmonischen Funktionen mit Hilfe der Methode der Reduzierten gegeben. Das Vorgehen weicht dabei stark von dem in [3] geschilderten ab, da die Topologie der Konvergenz im Graphen nicht mehr als Hilfsmittel benutzt werden kann: Die Referenzmaß-Technik, mit deren Hilfe man auf gleichgradige Stetigkeit schließen kann, ist an das Doobsche Konvergenzaxiom gebunden und steht hier nicht mehr zur Verfügung. In derselben Weise wie bei C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA [15] wird daher die Möglichkeit, auf gleichgradige Stetigkeit zu schließen, in der Definition der zur Integraldarstellung geeigneten Topologie $\mathcal{T}$ selbst verankert. Die hier gegebene Integraldarstellung schließt den Fall eines einzelnen harmonischen Raumes mit ein und verwendet an vielen Punkten ähnliche Techniken wie die Methode der spezifischen Multiplikation aus [15].

In § 6 werden die Reduzierten von G. MOKOBODZKI für harmonische Räume kurz vorgestellt, dann werden in § 7 entsprechende Reduzierte auf dem Produktraum definiert. Mit Hilfe dieser Reduzierten wird in § 8 eine Topologie $\mathcal{T}$ auf dem Kegel der positiven mehrfach superharmonischen Funktionen definiert, für die der Kegel metrisierbar und schwach vollständig wird. In § 9 wird die Integraldarstellung gegeben und die Natur der Extrempunkte diskutiert. Eine vollständige Beschreibung der letzteren erscheint auf Grund eines Beispiels sehr schwierig. Auch die Frage, ob die Darstellungsmaße eindeutig bestimmt sind, ist noch offen.

4. Unter geeigneten Voraussetzungen existiert zu einem harmonischen Raum ein starker Markoff-Prozess mit einer Halbgruppe submarkoffscher Kerne, deren exzessive Funktionen mit den positiven hyperharmonischen Funktionen übereinstimmen. In entsprechender Weise sind also die positiven separat hyperharmonischen Funktionen genau die separat exzessiven Funktionen bezüglich der zugehörigen Halbgruppen. R. CAIROLI [10] hat nun 1966 gezeigt, daß diese Funktionen exzessiv sind bezüglich der Produkthalbgruppe.

Ein solches Resultat läßt sich für mehrfach hyperharmonische Funktionen nur dann formulieren, wenn auf dem Produktraum eine geeignete Potentialtheorie zur Verfügung steht. Für die Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}^n$ ist dies der Fall. Das entsprechende Resultat wurde 1961 von V. AVANISSIAN [1] bewiesen.

Die Frage, ob man über die Produkthalbgruppe eine geeignete Potentialtheorie auf dem Produktraum konstruieren kann, erscheint interessant angesichts der Tatsache, daß man die zur Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ gehörende Halbgruppe als Produkt der Halbgruppen der Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}^n$ und der gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$ darstellen kann.

Herrn J.C. Taylor, Montreal, der mich auf dieses Thema aufmerksam gemacht hat, und den Herren C. Portenier, Erlangen, und K. Janßen, Düsseldorf, danke ich für viele wichtige Hinweise und anregende Gespräche. Mein besonderer Dank gilt meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. H. Bauer, für die langjährige und geduldige Förderung meiner mathematischen Arbeit.

I. PRODUKTE HARMONISCHER RÄUME

Gegeben seien harmonische Räume $(X_1, \mathcal{H}_1^*), \dots, (X_m, \mathcal{H}_m^*)$ im Sinne von C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA [15], d.h. für jedes $i = 1, \dots, m$ ist X_i ein lokal kompakter Raum versehen mit einem Garbendatum $\mathcal{H}_i^*$ hyperharmonischer Funktionen. $\mathcal{H}_i$ bezeichne das zugehörige Garbendatum harmonischer Funktionen. Für eine systematische Darstellung der Theorie harmonischer Räume sei auf H. BAUER [6] und C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA [15] verwiesen.

Das cartesische Produkt $X := X_1 \times \dots \times X_m$ versehen mit der Produkttopologie ist wieder ein lokal kompakter Raum. Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ betrachten wir die numerischen Funktionen auf U , die in jeder Variablen separat, bei festem Wert der anderen Variablen harmonisch (bzw. hyperharmonisch) sind auf dem zugehörigen Schnitt von U . Sie heißen separat harmonisch (bzw. separat hyperharmonisch) und bilden jeweils ein Garbendatum.

Diese beiden Garbendaten haben in vieler Hinsicht gleiche Eigenschaften wie die Garbendaten der zugrundeliegenden harmonischen Räume. Die Untersuchung solcher Produkt-invarianter Eigenschaften bildet den Gegenstand dieses Abschnitts. Da die Stetigkeit (bzw. Halbstetigkeit) der betrachteten Funktionen für die Methoden der Potentialtheorie eine große Rolle spielt, müssen beide Funktionsklassen noch etwas eingeschränkt werden.

Der Index i bezeichnet im folgenden stets ein Element der Menge $\{1, \dots, m\}$. Auf den Zusatz "für $i = 1, \dots, m$ " wird meist verzichtet.

§ 1. Mehrfach harmonische Funktionen.

Separat harmonische Funktionen sind per Definition auf dem Produktraum nur separat stetig. Die Stetigkeit soll daher zusätzlich gefordert werden:

Definition 1.1: Sei U offen $\subset X$. Eine stetige separat harmonische Funktion auf U heiße mehrfach harmonisch (kurz m -harmonisch) auf U .

Die Menge dieser Funktionen werde mit $MH(U)$ bezeichnet. Die Abbildung MH , die jedem U offen $\subset X$ die Menge $MH(U)$ zuordnet, definiert ein Garbendatum numerischer Funktionen auf X , und für jedes U ist $MH(U)$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{C}(U)$, dem Vektorraum der stetigen Funktionen auf U . Ist U von der Form $U_1 \times \dots \times U_m$ mit U_i offen $\subset X_i$, so gilt

$$\mathcal{H}_1(U_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_m(U_m) \subset MH(U).$$

Der folgende Satz kennzeichnet die mehrfach harmonischen Funktionen.

Satz 1.2: Sei U offen $\subset X$. Eine separat harmonische Funktion h auf U ist genau dann stetig, wenn sie lokal beschränkt ist auf U .

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist. Dabei genügt es, den Fall $m=2$, d.h. $X = X_1 \times X_2$ zu betrachten. Sei also h lokal beschränkt auf U , ferner $U_1 \subset X_1$ und $U_2 \subset X_2$ offene Mengen mit $U_1 \times U_2 \subset U$. Bezeichnet h_x für $x \in U_1$ die harmonische Funktion $y \mapsto h(x, y)$ auf U_2 , so ist die Familie

$$\{h_x \in \mathcal{H}_2(U_2) : x \in U_1\}$$

lokal gleichmäßig beschränkt und damit gleichmäßig stetig auf U_2 . Dies ist eine Konsequenz des Bauerschen Konvergenzaxioms für $\mathcal{H}_2$ ([15], Th. 11.1.1). Nach N. BOURBAKI, Topologie Générale Ch. X, § 2.1, Prop. 1, Cor. 3 [7] ist h stetig auf $U_1 \times U_2$, und der Satz ist bewiesen.

Bemerkung: Die Frage, ob jede separat harmonische Funktion auf dem Produktraum X stetig ist, wurde bisher nur für den Fall Brelotscher harmonischer Räume X_i ($i = 1, \dots, m$) vom Typ $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Garbendatum der Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta h = 0$ positiv beantwortet:

V. AVANISSIAN [2] hat 1961 gezeigt, daß jede separat harmonische Funktion auf X wieder harmonisch ist bezüglich der Laplace-Gleichung. Insbesondere ist sie damit stetig. Dies ist ein reelles Analogon des berühmten Satzes von F. HARTOGS von 1906, wonach jede separat analytische Funktion mehrerer komplexer Veränderlicher auf $\mathbb{C}^n$ analytisch ist.

Wie im komplexen Fall besteht die wesentliche Schwierigkeit in dem Beweis, daß jede separat harmonische Funktion auf X lokal beschränkt ist. V. AVANISSIAN macht entscheidenden Gebrauch von der Potenzreihen-Darstellung, insbesondere durch den Aufstieg zur Komplexifizierung $X \times X$, was in der Theorie harmonischer Räume nicht zur Verfügung steht. Ein Gegenbeispiel einer separat harmonischen, jedoch nicht stetigen Funktion ist nicht bekannt.

Nun lassen sich die ersten beiden Axiome harmonischer Räume für MH nachweisen:

Positivitäts-Eigenschaft 1.3: MH ist nichtausgeartet in allen Punkten von X , d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U , auf der eine strikt positive m -harmonische Funktion existiert.

Beweis: Sei $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$, U_i eine offene Umgebung von x_i in X_i und $h_i > 0$ eine Funktion aus $\mathcal{H}_i(U_i)$. Dann ist

$$h_1 \otimes \dots \otimes h_m \in MH(U_1 \times \dots \times U_m).$$

Konvergenz-Eigenschaft 1.4: MH genügt dem Bauerschen Konvergenzaxiom K_1 , d.h.

K_1 : Für jede aufsteigende Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ m -harmonischer Funktionen auf einer offenen Menge $U \subset X$ ist die obere Einhüllende $\sup h_n$ aus $MH(U)$, wenn sie lokal nach oben beschränkt ist.

Beweis: Das Supremum einer solchen Folge ist separat harmonisch wegen des Bauerschen Konvergenzaxioms für $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \dots, m$, und damit nach Satz 1.2 m-harmonisch auf U.

Das Bauersche Konvergenzaxiom wurde 1960 von H. BAUER unter der Bezeichnung K_1 in die Theorie harmonischer Räume eingeführt (vgl. [5]). In der Arbeit [5] findet sich auch die Formulierung des Doobschen Konvergenzaxioms, die sich als K_D später durchgesetzt hat und die etwas von der ursprünglich 1955 von J.L. DOOB [16] gegebenen Fassung abweicht. Ferner wird in der Potentialtheorie das Brelotsche Konvergenzaxiom K_B benutzt, das 1957 von M. BRELOT vorgeschlagen wurde (vgl. [8]).

Zunächst wurden diese Axiome für aufsteigend filtrierende Familien formuliert, bis C. CONSTANTINESCU und A. CORNEA bewiesen, daß dies auch ohne die Annahme einer abzählbaren Basis zu der Formulierung für aufsteigende Folgen äquivalent ist (vgl. [15], Prop. 1.1.2).

Das Doobsche und das Brelotsche Konvergenzaxiom werden in § 5 eingehend behandelt.

§ 2. M-resolutive Mengen.

Nun soll gezeigt werden, daß der Raum X eine Basis offener Mengen besitzt, die den resolutiven Mengen eines harmonischen Raumes entsprechen. Für diese Mengen lassen sich nämlich Maße definieren, mit deren Hilfe sich jede Funktion aus MH darstellen läßt. Diese Integralgleichungen haben weitreichende Konsequenzen.

Definition 2.1: Eine Menge $V \subset X$ heiße m-resolutiv, wenn sie von der Form $V = V_1 \times \dots \times V_m$ ist, wobei die V_i relativ kompakte, resolutive Teilmengen von X_i sind. Gilt für U offen $\subset X$ $\bar{V} \subset U$, so heiße V m-resolutiv in U . Für $x = (x_1, \dots, x_m) \in V$ heiße das Maß

$$\mu_x^V := \mu_{x_1}^{V_1} \otimes \dots \otimes \mu_{x_m}^{V_m}$$

zu V und x gehöriges m-harmonisches Maß, wobei $\mu_{x_i}^{V_i}$ das zu V_i und x_i gehörige harmonische Maß bezeichnet.

Die m-resolutiven Mengen bilden eine Basis offener, relativ kompakter Teilmengen von X . Die m-harmonischen Maße sind positive Radonmaße, die vom "distinguierten Rand"

$$dV := V_1^* \times \dots \times V_m^* \subset V^*$$

getragen werden. Der Fall $dV = \emptyset$ ist möglich, da eine der Mengen $V_i^* = \emptyset$ sein kann. In diesem Fall ist jedoch 0 die einzige harmonische Funktion auf dem betreffenden V_i und damit auch die einzige m-harmonische Funktion auf V .

Satz 2.2: Sei V m -resolutiv in X . Für jedes $f \in \mathcal{C}(dV)$

ist die durch

$$M_f^V(x) := \int f d\mu_x^V \quad (x \in V)$$

definierte reelle Funktion m -harmonisch auf V .

Beweis: Sei zunächst $f = g_1 \otimes \dots \otimes g_m$ mit $g_i \in \mathcal{C}(V_i^*)$. Dann ist M_f^V das Tensorprodukt der entsprechenden Lösungen des

Dirichletschen Problems für V_i und g_i ,

$$M_f^V = H_{\alpha_1}^{V_1} \otimes \dots \otimes H_{\alpha_m}^{V_m}$$

und damit m -harmonisch auf V . Insbesondere sind die konstanten Funktionen auf dV von diesem Typ.

Nun läßt sich jedes $f \in \mathcal{C}(dV)$ auf dem kompakten Raum dV gleichmäßig durch eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{C}(V_1^*) \otimes \dots \otimes \mathcal{C}(V_m^*)$ approximieren. Wir zeigen, daß dann die Folge $(M_{f_n}^V)_{n \in \mathbb{N}}$ auf V lokal gleichmäßig gegen M_f^V konvergiert:

Sei dazu K kompakt $\subset V$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da M_1^V stetig ist, existiert ein $M > 0$ mit $M_1^V \leq M$ auf K . Ferner existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{auf } dV$$

für alle $n \geq N$. Für diese n gilt daher

$$|M_{f_n}^V - M_f^V| \leq M_{|f_n - f|}^V \leq \frac{\varepsilon}{M} M_1^V \leq \varepsilon \quad \text{auf } K,$$

was zu zeigen war.

Somit ist M_f^V stetig und, da die Konvergenz auch auf jedem Schnitt von V lokal gleichmäßig ist, separat harmonisch.

Unmittelbar aus diesem Satz ergeben sich zwei Korollare:

Korollar 2.3: Sei U offen $\subset X$ und $h \in \mathcal{C}(U)$. Die Funktion h ist genau dann m -harmonisch auf U , wenn für jede in U m -resolutive Menge V und jedes $x \in V$ gilt

$$h(x) = \int h d\mu_x^V.$$

Korollar 2.4: $MH(U)$ ist vollständig bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz.

Für m -resolutive Mengen V ist die Funktion M_f^V offensichtlich ein Kandidat eines schwachen Dirichletschen Problems für V und $f \in \mathcal{C}(dV)$. In der Tat definiert sie einen Keldych-Operator auf V , d.h. einen positiven linearen Operator $M^V : \mathcal{C}(V^*) \longrightarrow MH(V)$ mit der Eigenschaft, daß für jede auf einer offenen Umgebung von $\bar{V}$ definierte m -harmonische Funktion h gilt

$$M^V(h|_{V^*}) = h|_V,$$

wobei $h|_V$ die Restriktion von h bedeutet. Unter zusätzlichen Voraussetzungen, wenn nämlich die resolutiven Mengen $V_i \subset X_i$ sogar regulär sind, läßt sich dies schärfer formulieren:

Satz 2.5: Sei $V = V_1 \times \dots \times V_m$ ein Produkt regulärer Mengen $V_i \subset X_i$. Dann existiert zu jedem $f \in \mathcal{C}(dV)$ genau eine stetige Fortsetzung $F \in \mathcal{C}(\bar{V})$ mit folgenden Eigenschaften:

1) F ist m -harmonisch auf V .

2) $f \geq 0 \implies F \geq 0$.

3) Auf dem Inneren V_i jedes Schnittes der Form $\bar{V}_i$ von V^* ist F harmonisch.

Beweis: Setzt man $\mu_{x_i}^{V_i} = \varepsilon_{x_i}$ für $x_i \in V_i^*$ und erweitert man für $f \in C(dV)$ den Definitionsbereich von M_f^V auf $\bar{V}$ durch

$$\mu_{(x_1, \dots, x_m)}^V := f \cdot d\mu_{x_1}^{V_1} \otimes \dots \otimes d\mu_{x_m}^{V_m} \quad (x_1, \dots, x_m) \in \bar{V},$$

so leistet M_f^V das Verlangte. Man hat nur den Beweis von Satz 2.2

zu wiederholen und zu beachten, daß für $f = g_1 \otimes \dots \otimes g_m$

M_f^V stetig ist auf $\bar{V}$, ferner die Konvergenz von $(M_{f_n}^V)_{n \in \mathbb{N}}$

gleichmäßig auf $\bar{V}$.

Die Eindeutigkeit folgt aus der Bedingung 3 des Satzes und der Regularität der Mengen V_i .

Zieht man nun die Konvergenz-Eigenschaft 1.4 hinzu, so ergeben sich weitreichende Konsequenzen:

Satz 2.6: Sei V eine m -resolutive Menge und sei f eine nach unten beschränkte numerische Funktion auf dV . Dann ist die Funktion

$$x \longrightarrow f^* f \, d\mu_x^V \quad (x \in V)$$

die obere Einhüllende einer isotonen Folge m -harmonischer Funktionen auf V , also insbesondere nach unten halbstetig. Ist f beschränkt, so ist sie m -harmonisch.

Der Beweis gehört zu den Standard-Methoden der Potentialtheorie (vgl. [5], Satz 8 oder [15], Prop. 1.1.4) und braucht hier nicht wiederholt zu werden. Die Aussage des Satzes ist sogar äquivalent zum Bauerschen Konvergenzaxiom.

Satz 2.7: Sei U offen $\subset X$. Jede lokal gleichmäßig beschränkte Menge m -harmonischer Funktionen auf U ist gleichgradig stetig.

Der Beweis gehört ebenfalls zum Standard der Potentialtheorie. Das Garbendatum MH und das System der m -resolutiven Mengen erfüllen etwa die Voraussetzungen von [15], Th. 11.1.1, und damit ist die Aussage von Satz 2.7 sogar äquivalent zur Gültigkeit des Bauerschen Konvergenzaxioms für MH .

§ 3. Mehrfach hyperharmonische Funktionen.

In gleicher Weise wie mehrfach harmonische Funktionen lassen sich nun auch mehrfach hyperharmonische Funktionen definieren und durch Integral-Ungleichungen mittels der m-harmonischen Maße charakterisieren.

Definition 3.1: Sei U offen $\subset X$. Eine nach unten halbstetige separat hyperharmonische Funktion auf U heiße mehrfach hyperharmonisch (kurz m-hyperharmonisch) auf U .

Die Menge dieser Funktionen werde mit $MH^*(U)$ bezeichnet.

Es ergeben sich folgende

Eigenschaften: 1) MH^* definiert ein Garbendatum numerischer Funktionen auf X .

2) Für jedes U offen $\subset X$ ist $MH^*(U)$ ein konvexer Kegel nach unten halbstetiger Funktionen auf U mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

3) $u, v \in MH^*(U) \implies \inf(u, v) \in MH^*(U)$.

4) Für jede nicht-leere, aufsteigend filtrierende Menge $\mathcal{F} \subset MH^*(U)$ liegt $\sup \mathcal{F}$ in $MH^*(U)$.

5) $MH(U) = MH^*(U) \cap (-MH^*(U))$.

6) Ist U von der Form $U_1 \times \dots \times U_m$ mit U_i offen $\subset X_i$, so gilt für das Tensorprodukt der positiven Kegel ${}_+\mathcal{H}_1^*(U_1)$

$${}_+\mathcal{H}_1^*(U_1) \otimes \dots \otimes {}_+\mathcal{H}_m^*(U_m) \subset MH_+^*(U),$$

wobei $MH_+^*(U)$ den Kegel der positiven m-hyperharmonischen Funktionen auf U bezeichnet.

Eine Satz 1.2 entsprechende Kennzeichnung der mehrfach hyperharmonischen Funktionen kann erst nach weiteren Vorbereitungen bewiesen werden. Zunächst soll in Analogie zu Korollar 2.3 eine Kennzeichnung mittels der m -harmonischen Maße gegeben werden:

Satz 3.2: Sei U offen $\subset X$ und $v : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine nach unten halbstetige Funktion. Genau dann ist v auf U m -hyperharmonisch, wenn für jede in U m -resolutive Menge V und jedes $x \in V$ gilt

$$\int v \, d\mu_x^V \leq v(x) .$$

Beweis: Es ist nur noch zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist. Hierzu genügt es, den Fall $m = 2$ zu betrachten.

Seien offene Mengen $U_1 \subset X_1$ mit $U_1 \times U_2 \subset X$ gegeben, auf denen eine strikt positive harmonische Funktion existiert. Dann läßt sich o.B.d.A. annehmen, daß die Konstanten auf U_1 harmonisch sind. Ferner gilt $V_i^* \neq \emptyset$ für jede in U_1 resolutive Menge V_i . Wir zeigen nun, daß für $y \in U_2$ die Funktion $v(\cdot, y)$ auf U_1 hyperharmonisch ist:

Sei dazu eine resolutive Menge V_1 mit $\bar{V}_1 \subset U_1$ und eine Funktion $f \in \mathcal{C}(V_1^*)$ mit $f < v(\cdot, y)$ auf V_1^* gegeben. Nach stetiger Fortsetzung läßt sich sogar o.B.d.A. $f \in \mathcal{C}(U_1)$ annehmen, und damit ist die Funktion $f \otimes 1$ stetig auf $U_1 \times U_2$.

Zu jedem Punkt des kompakten Raumes $V_1^* \times \{y\}$ gibt es eine offene Umgebung der Form $W_1 \times W_2$ in $U_1 \times U_2$ mit

$$f \otimes 1 < v \quad \text{auf } W_1 \times W_2 .$$

Endlich viele dieser Mengen $W_1 \times W_2$ reichen bereits aus zur Überdeckung von $V_1^* \times \{y\}$, und daher gibt es eine resolutive Umgebung V_2 von y im Raum X_2 , deren Abschluß in allen betreffenden Mengen W_2 enthalten ist.

Nun ist $V := V_1 \times V_2$ m -resolutiv in U , und für jedes $x \in V_1$ gilt

$$\int f d\mu_x^{V_1} = \int f \otimes 1 d\mu_{(x,y)}^V \leq \int v d\mu_{(x,y)}^V \leq v(x,y)$$

nach Voraussetzung, und dies war zu zeigen.

Dasselbe gilt für alle anderen Schnitte von $U_1 \times U_2$, also ist v separat harmonisch auf $U_1 \times U_2$. Da MH^* ein Garbendatum ist, folgt die Behauptung.

Dieses Resultat entspricht dem Vollständigkeitsaxiom harmonischer Räume mit dem Unterschied, daß sich die m -harmonischen Maße nicht mit der Perron-Wiener-Brelot-Methode bezüglich MH^* definieren lassen. Zwar läßt sich für m -resolutive Mengen, allgemeiner für Produkte von Minimumprinzip-Mengen ein Minimumprinzip beweisen, aber die m -resolutiven Mengen sind nicht resolutiv bezüglich MH^* , wie in der anschließenden Bemerkung 3 näher ausgeführt wird.

Satz 3.3: Sei $U = U_1 \times \dots \times U_m \subset X$, wobei die Mengen U_i Minimumprinzip-Mengen in X_i sind. Ferner sei $v \in MH^*(U)$ und K kompakt $\subset X$, so daß gilt

$$1) \quad v \geq 0 \text{ auf } U \setminus K,$$

$$2) \quad \liminf_{x \rightarrow z, x \in U} v(x) \geq 0 \quad \text{für alle } z \in U^*.$$

Dann ist $v \geq 0$ auf U .

Beweis: Nach der Definition der Minimumprinzip-Mengen

([15], S. 17) ist $v \geq 0$ auf jedem Schnitt der Form U_i von U .

Korollar 3.4: Ist speziell $U = U_1 \times \dots \times U_m$ relativ kompakt in X , wobei die Mengen U_i wieder Minimumprinzip-Mengen in X_i sind, ferner v eine nach unten halbstetige, numerische Funktion auf $\bar{U}$, m -hyperharmonisch auf U und hyperharmonisch auf jedem Schnitt der Form U_i des Randes U^* , so gilt

$$v \geq 0 \text{ auf } dU \implies v \geq 0 \text{ auf } \bar{U}.$$

Beweis: Nach dem Minimumprinzip ist $v \geq 0$ auf jedem Schnitt der Form U_i von U^* . Nun läßt sich Satz 3.3 anwenden, wobei $\bar{U}$ als kompakte Menge gewählt werden kann.

Bemerkungen: 1) Die Bedingungen an v in Korollar 3.4 entsprechen den Bedingungen von Satz 2.5. Sie sind insbesondere erfüllt, falls v auf einer Umgebung von U m -hyperharmonisch ist.

2) D. FEYEL und A. de La PRADELLE [18] haben gezeigt, daß das Garbendatum MH^* maximal ist bezüglich dieses Minimumprinzips für die m -resolutiven Mengen von X .

3) Sei $V = V_1 \times \dots \times V_m$ ein Produkt regulärer Mengen V_i in X_i . Für $f \in \mathcal{C}(V^*)$ ist die wie in Satz 2.5 auf $\bar{V}$ definierte und stetige Funktion M_f^V bereits durch die Werte von f auf dV festgelegt.

Gilt $f = M_f^V$ auf V^* , so ist f resolutiv, d.h. die Oberlösung, also die untere Einhüllende aller zu f gehörigen Oberfunktionen aus $MH^*(V)$, und die entsprechend definierte Unterlösung stimmen überein. Sie sind daher m -harmonisch auf V . In diesem Fall ist M_f^V die Lösung des Dirichletschen Problems nach der Perron-Wiener-Brelot-Methode.

Im allgemeinen stimmen jedoch Ober- und Unterlösung nicht mehr überein. Sie sind daher auch nur m -hyperharmonisch bzw. m -hypoharmonisch auf V , was durch $\{-MH^*(V)\}$ definiert wird. Man kann sie dennoch als "Lösungen" eines verallgemeinerten Dirichletschen Problems ansprechen. Dieses Problem wurde zuerst von H.J. BREMER-MANN [9] für plurisubharmonische Funktionen auf $\mathbb{C}^n$, dann von J.B. WALSH [25] für mehrfach superharmonische Funktionen der klassischen Potentialtheorie der Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}^n$ untersucht.

Damit sind die m -resolutiven Mengen nicht mehr resolutiv bezüglich MH^* im Sinne harmonischer Räume. Dies unterscheidet (X, MH^*) von einem harmonischen Raum.

§ 4. Nahezu m-hyperharmonische Funktionen.

In harmonischen Räumen spielen die nahezu hyperharmonischen Funktionen eine große Rolle, da sie als untere Einhüllende von Familien hyperharmonischer Funktionen auftreten. Ihre Theorie läßt sich auf Grund der Kennzeichnung der mehrfach hyperharmonischen Funktionen durch Integral-Ungleichungen mittels der m-harmonischen Maße vollständig auf die vorliegende Situation übertragen.

Definition 4.1: Sei U offen $\subset X$. Eine numerische Funktion v auf U heiße nahezu m-hyperharmonisch auf U , wenn

- 1) v lokal nach unten beschränkt ist,
- 2) für jede in U m-resolutive Menge V und jedes $x \in V$ gilt

$$\int^* v \, d\mu_x^V \leq v(x) \, .$$

Offenbar ist jede m-hyperharmonische Funktion nahezu m-hyperharmonisch. Umgekehrt gilt

Satz 4.2: Sei U offen $\subset X$. Die Regularisierte $\hat{v}$ einer jeden auf U nahezu m-hyperharmonischen Funktion v ist m-hyperharmonisch auf U . Ferner gilt für jedes $x \in U$

$$\hat{v}(x) = \sup_{V \in \mathcal{W}(x)} \int^* v \, d\mu_x^V \, ,$$

wobei $\mathcal{W}(x)$ das System aller m-resolutiven Umgebungen von x in U bezeichnet.

Beweis: Sei V m-resolutiv in U . Nach Satz 2.6 ist die Funktion

$$x \longrightarrow \int^* v \, d\mu_x^V$$

nach unten halbstetig auf V . Wegen $\hat{v} \leq v$ gilt für alle $x \in V$

$$\int \hat{v} d\mu_x^V \leq \int v^* d\mu_x^V \leq v(x),$$

folglich

$$\int \hat{v} d\mu_x^V \leq \int v^* d\mu_x^V \leq \hat{v}(x).$$

Nach Satz 3.2 ist $\hat{v} \in MH^*(U)$, ferner ist für alle $x \in U$ gezeigt

$$\hat{v}(x) \geq \sup_{V \in \mathcal{W}(x)} \int v^* d\mu_x^V.$$

Sei nun $x \in U$ und W eine offene Umgebung von x in U , auf der eine strikt positive Funktion $h \in MH(W)$ existiert. Es kann $h(x) = 1$ angenommen werden.

Für jedes $\alpha < \hat{v}(x)$ gibt es eine Menge $V \in \mathcal{W}(x)$ mit $\bar{V} \subset W$ und $\alpha h(y) < \hat{v}(y)$ für alle $y \in \bar{V}$. Dann gilt

$$\alpha = \alpha/h d\mu_x^V \leq \int \hat{v} d\mu_x^V \leq \int v^* d\mu_x^V,$$

und die Gleichheit ist bewiesen.

In genau derselben Weise übertragen sich die übrigen Eigenschaften nahezu hyperharmonischer Funktionen auf nahezu m -hyperharmonische Funktionen. Insbesondere ist für jede lokal gleichmäßig nach unten beschränkte Familie $\mathcal{F}$ nahezu m -hyperharmonischer Funktionen auf U offen $\subset X$ die Funktion $\inf \mathcal{F}$ ebenfalls nahezu m -hyperharmonisch auf U und

$$\widehat{\inf \mathcal{F}} \in MH^*(U).$$

Nun läßt sich die Satz 1.2 entsprechende Kennzeichnung m -hyperharmonischer Funktionen beweisen:

Satz 4.3: Sei U offen $\subset X$. Eine separat hyperharmonische Funktion v auf U ist genau dann nach unten halbstetig, wenn sie lokal nach unten beschränkt ist.

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist. Dabei genügt es, den Fall $m = 2$ zu betrachten.

Sei zunächst v lokal beschränkt auf U . Dann ist v universell integrierbar und für jede in U m -resolutive Menge $V = V_1 \times V_2$ ist die Funktion

$$(x, y) \longrightarrow \int v \, d\mu_{(x, y)}^V$$

m -harmonisch auf V . Insbesondere gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int \int v \, d\mu_x^{V_1} d\mu_y^{V_2} \leq \int v(x, \cdot) \, d\mu_y^{V_2} \leq v(x, y)$$

für alle $(x, y) \in V$. Also ist v nahezu m -hyperharmonisch auf U .

Sei nun $(x, y) \in U$ und $U_1 \times U_2$ mit U_i offen $\subset X_i$ eine Umgebung von (x, y) in U . Bezeichnet $\mathcal{W}_1(x)$ bzw. $\mathcal{W}_2(y)$ das System der in U_1 bzw. U_2 resolutive Umgebungen von x bzw. y , so gilt für jedes

$$V_1 \in \mathcal{W}_1(x)$$

$$\hat{v}(x, y) \leq \sup_{V_1 \in \mathcal{W}_1(x)} \int v \, d\mu_x^{V_1} d\mu_y^{V_2} = \int v(x, \cdot) \, d\mu_y^{V_2}$$

wegen des Satz 4.2 entsprechenden Resultats für harmonische Räume

(vgl. [6], 2.1.1 oder [15], Prop. 5.1.4), also auch

$$\hat{v}(x, y) \geq \sup_{V_2 \in \mathcal{W}_2(y)} \int v(x, \cdot) \, d\mu_y^{V_2} = v(x, y).$$

Somit ist $v = \hat{v}$ und damit m -hyperharmonisch auf U .

Nunmehr sei v lediglich lokal nach unten beschränkt auf U .

Zu jedem $(x, y) \in U$ gibt es eine offene Umgebung W in U , auf der eine

strikt positive Funktion $h \in MH(W)$ existiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$v_n := \inf(v, n \cdot h)$$

separat hyperharmonisch und lokal beschränkt auf W , also nach dem vorigen m -hyperharmonisch auf W . Dasselbe gilt für das Supremum v der aufsteigenden Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da MH^* ein Garbendatum ist, folgt $v \in MH^*(U)$.

Insbesondere sind die positiven separat hyperharmonischen Funktionen mehrfach hyperharmonisch.

§ 5. Mehrfach superharmonische Funktionen und andere
Konvergenz-Eigenschaften.

Wesentlich für den Begriff der superharmonischen Funktion in harmonischen Räumen ist, daß man durch Integration mittels der harmonischen Maße eine harmonische Funktion erhält. Hieraus folgt die Endlichkeit auf einer dichten Teilmenge. Es kennzeichnet das Doob'sche Konvergenzaxiom, daß die letztere Bedingung hinreichend ist: eine hyperharmonische Funktion ist bereits superharmonisch im obigen Sinn, wenn sie auf einer dichten Teilmenge endlich ist.

Die folgende Definition mehrfach superharmonischer Funktionen ist dem Bauerschen Konvergenzaxiom K_1 angemessen. Sie umfaßt mehr Funktionen als nur die nach unten halbstetigen separat superharmonischen.

Definition 5.1: Sei U offen $\subset X$. Eine m -hyperharmonische Funktion $v \in MH^*(U)$ heiße mehrfach superharmonisch (kurz m -superharmonisch) auf U , wenn für jede in U m -resolutive Menge V die Abbildung $x \longrightarrow \int_V v d\mu_x^V$ ($x \in V$) m -harmonisch ist auf V .

Die Menge dieser Funktionen werde mit $MS(U)$ bezeichnet. Es ergeben sich folgende, mit Ausnahme der Punkte (4), (7) und (8) den Eigenschaften von MH^* aus § 3 entsprechende

Eigenschaften: 1) MS definiert ein Garbendatum numerischer Funk-

tionen auf X .

2) Für jedes U offen $\subset X$ ist $MS(U)$ ein konvexer Kegel nach unten halbstetiger Funktionen auf U mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

$$3) u, v \in MS(U) \implies \inf(u, v) \in MS(U).$$

$$4) u \in MH^*(U), v \in MS(U), u \leq v \implies u \in MS(U).$$

$$5) MH(U) = MS(U) \cap (-MS(U)).$$

6) Ist U von der Form $U_1 \times \dots \times U_m$ mit U_i offen $\subset X_i$,

$\mathcal{J}_1^+(U_1)$ der Kegel der positiven superharmonischen Funktionen auf U_1 , so gilt

$$\mathcal{J}_1^+(U_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{J}_m^+(U_m) \subset MS_+(U),$$

wobei $MS_+(U)$ den Kegel der positiven m -superharmonischen Funktionen auf U bezeichnet.

7) Jedes $v \in MS(U)$ ist endlich auf einer dichten Teilmenge von U , da es für die m -harmonischen Maße integrierbar ist.

8) Jede auf U lokal nach unten beschränkte und separat superharmonische Funktion ist m -superharmonisch auf U .

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Umkehrung von (8) i.a. nicht zutrifft:

Beispiel: Seien $(X_1, \mathcal{H}_1)$ und $(X_2, \mathcal{H}_2)$ Brelotsche harmonische

Räume vom Typ $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) versehen mit dem Garbendatum der Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta h = 0$, ferner bezeichne G_x die Greensche

Funktion mit Pol in x auf X_1 , $1 \in \mathcal{H}_2(X_2)$ die konstante Funktion

mit Wert 1 auf X_2 . Dann ist die Funktion $G_x \otimes 1$ m -superharmonisch

auf $X_1 \times X_2$, aber nicht separat superharmonisch, da sie auf der Menge

$\{x\} \times X_2$ konstant $= +\infty$ ist.

Genügt MH dem Doobschen Konvergenzaxiom K_D , d.h.

K_D : Für jede aufsteigende Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ m-harmonischer Funktionen auf einer offenen Menge $U \subset X$ ist die obere Einhüllende $\sup h_n$ aus $MH(U)$, wenn sie auf einer dichten Teilmenge von U endlich ist,

so gilt das folgende Kriterium, das dann auch zur Definition mehrfach superharmonischer Funktionen verwendet werden kann:

Satz 5.2: Sei U offen $\subset X$. Eine Funktion $v \in MH^*(U)$ ist genau dann m-superharmonisch auf U , wenn sie auf einer dichten Teilmenge von U endlich ist.

Die Gültigkeit von Satz 5.2 ist sogar äquivalent zu der von K_D für MH . Letztere läßt sich ganz wie in harmonischen Räumen auch mit Hilfe der m-harmonischen Maße kennzeichnen (vgl. H. BAUER [6], 1.1.8):

Satz 5.3: MH erfüllt K_D genau dann, wenn für jede m-resolutive Menge $V \subset X$ und jede numerische Funktion f auf dV , welche für eine in V dichte Menge von Punkten $x \in V$ μ_x^V -integrierbar ist, gilt: f ist μ_x^V -integrierbar für alle $x \in V$, ferner ist die Funktion $x \longrightarrow \int f d\mu_x^V$ ($x \in V$) m-harmonisch auf V .

Die Beweise für harmonische Räume lassen sich direkt auf die vorliegende Situation übertragen.

Genügt MH dem Brelotschen Konvergenzaxiom K_B , d.h.

K_B : Für jede aufsteigende Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ m-harmonischer Funktionen auf einem Gebiet $G \subset X$ ist die obere Einhüllende $\sup h_n$ aus $MH(G)$ wenn sie in einem Punkt von G endlich ist, so erhält man zunächst eine schärfere Aussage über mehrfach hyperharmonische Funktionen, die zusammen mit dem Analogon von Satz 5.3 zu einer Kennzeichnung mehrfach superharmonischer Funktionen führt, die zu K_B äquivalent ist:

Satz 5.4: Sei G ein Gebiet in X und $v \in MH^*(G)$. Dann ist v entweder konstant $= +\infty$ auf G , oder endlich auf einer dichten Teilmenge von G .

Satz 5.5: MH erfüllt K_B genau dann, wenn für jede m-resolutive Menge $V \subset X$ und jede numerische Funktion f auf dV , welche in einem Punkt $x \in V$ μ_x^V -integrierbar ist, gilt: f ist μ_x^V -integrierbar für alle $x \in V$, ferner ist die Funktion $x \longrightarrow \int f d\mu_x^V$ ($x \in V$) m-harmonisch auf V .

Korollar 5.6: Sei U offen $\subset X$. Eine Funktion $v \in MH^*(U)$ ist genau dann m-superharmonisch auf U , wenn sie auf keiner Zusammenhangskomponente von U konstant $= +\infty$ ist.

Die beiden Sätze finden sich mit geringen Abweichungen bei K. GOWRISANKARAN [19], Lemma 2 und Th. 1, der die Aussage von

Korollar 5.6 zur Definition mehrfach superharmonischer Funktionen verwendet.

Es gilt $K_B \implies K_D \implies K_1$. Wie in harmonischen Räumen sind die umgekehrten Implikationen falsch.

Nun soll die Frage untersucht werden, ob sich die Konvergenzeigenschaften der zugrunde liegenden harmonischen Räume auf das Garbendatum $\mathcal{M}\mathcal{H}$ übertragen. Mit der Konvergenzeigenschaft 1.4 wurde bereits gezeigt, daß dies für das Bauersche Konvergenzaxiom K_1 zutrifft. Dasselbe gilt für das Brelotsche Konvergenzaxiom K_B . Zur Vorbereitung des Beweises soll zunächst eine Verschärfung des Stetigkeits-Kriteriums von Satz 1.2 gezeigt werden:

Satz 5.7: Genügen die Garbendaten $\mathcal{H}_1$ dem Brelotschen Konvergenzaxiom, oder besitzen die Räume X_1 eine abzählbare Basis und die $\mathcal{H}_1$ genügen dem Doobschen Konvergenzaxiom, so gilt: Eine separat harmonische Funktion h auf einer offenen Menge $U \subset X$ ist genau dann stetig, wenn sie lokal nach unten beschränkt ist.

Beweis: Wie in Satz 1.2 ist nur der Fall $m = 2$ zu betrachten und zu zeigen, daß für offene, relativ kompakte Teilmengen $U_1 \subset X_1$ mit $\bar{U}_1 \times \bar{U}_2 \subset U$ die Familie

$$\{h_x \in \mathcal{H}_2(U_2) : x \in U_1\}$$

lokal gleichmäßig beschränkt und damit gleichgradig stetig ist auf U_2 , wobei h_x für $x \in U_1$ die harmonische Funktion $y \mapsto h(x, y)$ auf U_2

bedeutet. Wählt man U_2 so, daß auf einer Umgebung von $\tilde{U}_2$ in X_2 eine strikt positive harmonische Funktion existiert, so kann man, da h lokal nach unten beschränkt ist, o.B.d.A. $h_x \geq 0$ für alle $x \in U_1$ annehmen.

Gilt das Brelotsche Konvergenzaxiom für $\mathcal{H}_2$, so ist nach der Harnackschen Ungleichung (vgl. etwa H. BAUER [6], 1.5.5) die Familie $\{h_x : x \in U_1\}$ sogar gleichmäßig beschränkt auf jeder Zusammenhangskomponente G_2 von U_2 , da für mindestens ein $y \in G_2$, ja sogar für jedes gilt

$$a_y := \sup\{h(x, y) : x \in U_1\} < +\infty.$$

Besitzt X_2 eine abzählbare Basis und gilt das Doob'sche Konvergenzaxiom für $\mathcal{H}_2$, so läßt sich auf einer abzählbaren dichten Teilmenge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von U_2 ein Referenzmaß μ mit Träger U_2 konstruieren: Für das Maß

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n 2^n} \varepsilon_{y_n}$$

mit $a_n := \sup\{1, h(x, y_n) : x \in U_1\}$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt wie oben

$1 \leq a_n < +\infty$ und daher

$$\int h_x d\mu \leq 1 \quad \text{für alle } x \in U_1.$$

Nach der Harnackschen Ungleichung [6], 1.4.4 ist die Familie

$\{h_x : x \in U_1\}$ wieder gleichmäßig beschränkt auf U_2 , und damit folgt die Behauptung.

Die abzählbare Basis ist in diesem Zusammenhang bislang unentbehrlich, vgl. C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA [15], Bemerkung zu Cor. 11.1.2.

Satz 5.8: Genügen die Garbendaten $\mathcal{H}_i$ dem Brelotschen Konvergenzaxiom, so auch MH.

Beweis: Es genügt wieder, den Fall $m=2$ zu betrachten. Sei auf einem Gebiet $G \subset X$ eine aufsteigende Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset MH(G)$ gegeben und $h := \sup h_n$. Dann ist die Menge $\{h < +\infty\}$ offen in G : Sei $(x, y) \in G$ mit $h(x, y) < +\infty$ und G_i ein Gebiet in X_i mit $(x, y) \in G_1 \times G_2 \subset G$. Nach dem Brelotschen Konvergenzaxiom für $\mathcal{H}_2$ ist $h < +\infty$ auf $\{x\} \times G_2$, entsprechend dann auf $G_1 \times G_2$. Mit dem selben Argument ist auch die Menge $\{h = +\infty\}$ offen in G . Daher ist h entweder konstant $= +\infty$ auf G oder überall endlich und damit separat harmonisch. Das Stetigkeits-Kriterium von Satz 5.7 liefert nun die Behauptung.

Dieser Beweisgang läßt sich für das Doobsche Konvergenzaxiom nicht wiederholen, da man, ohne Näheres über die Gestalt der Absorptionsmengen zu wissen, nicht von einer dichten Teilmenge des Produktraums auf dichte Teilmengen in jedem Schnitt schließen kann. Mit Hilfe des Stetigkeits-Kriteriums von Satz 5.7 ergibt sich jedoch unmittelbar die folgende Konvergenz-Eigenschaft für MH, die schwächer ist als K_D , ihrerseits aber K_1 impliziert:

Satz 5.9: Haben die Räume X_i eine abzählbare Basis und genügen die Garbendaten $\mathcal{H}_i$ dem Doobschen Konvergenzaxiom, so gilt für jede offene Menge $U \subset X$: Für jede aufsteigende Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset MH(U)$ ist die obere Einhüllende $\sup h_n$ aus $MH(U)$, wenn sie auf einer dichten Teilmenge eines jeden Schnittes von U endlich ist.

In besonderen Fällen, in denen man die Absorptionsmengen kennt, läßt sich jedoch von einer dichten Teilmenge des Produktraums auf jeden Schnitt schließen. Dazu gehören alle wichtigen Beispiele harmonischer Räume mit der Doobschen Konvergenz-Eigenschaft. Die Rolle der Absorptionsmengen in dieser Frage wird durch die folgende Eigenschaft begründet (vgl. [6], 1.4.5): Gilt für das Supremum h einer aufsteigenden Folge harmonischer Funktionen $h(x) < +\infty$, so ist h harmonisch auf dem Inneren der kleinsten x enthaltenden Absorptionsmenge.

Beispiele: 1) Genügen die Garbendaten $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{m-1}$ dem Brelotschen Konvergenzaxiom und $\mathcal{H}_m$ dem Doobschen, so gilt K_D für MH.

Sei $U = U_1 \times \dots \times U_m$ offen $\subset X$, wobei die Mengen $U_1, \dots, U_{m-1}$ Gebiete in $X_1, \dots, X_{m-1}$ seien, und h die obere Einhüllende einer aufsteigenden Folge in $MH(U)$. Gilt für ein $x = (x_1, \dots, x_m) \in U$ $h(x) < +\infty$, so folgt nach Satz 5.8, angewandt auf $X_1 \times \dots \times X_{m-1}$,

$$h < +\infty \quad \text{auf } U_1 \times \dots \times U_{m-1} \times \{x_m\}.$$

Ist daher h endlich auf einer dichten Teilmenge von U , so auch auf einer dichten Teilmenge eines jeden Schnittes der Form U_m von U . Satz 5.9 liefert nun die Behauptung.

2) Seien $(X_1, \mathcal{H}_1)$ und $(X_2, \mathcal{H}_2)$ Bauersche harmonische Räume vom Typ $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 1$) versehen mit dem Garbendatum der Lösungen der

Wärmeleitungs-Gleichung

$$\Delta h = \frac{\partial h}{\partial x_{n+1}}$$

(vgl. H. BAUER [6], § 2 Standard-Beispiel (2)). Dann genügen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ dem Doob'schen Konvergenzaxiom, ebenso MH auf $X_1 \times X_2$.

Nach [6], § 4 sind alle Absorptionsmengen von X_1 von der Form

$$A_t := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \leq t\}, \quad -\infty \leq t \leq +\infty,$$

also ist $A_x := A_{x_{n+1}}$ die kleinste den Punkt $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in X_1$ enthaltende Absorptionsmenge.

Lemma 5.10: Sei V ein reguläres Gebiet in X_1 und $x \in V$. Ist $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{H}_1(X_1)$ mit $\sup h_n(x) = +\infty$, so gilt $\sup h_n = +\infty$ auf der offenen Menge $V \cap \{A_x \neq \emptyset\}$.

Beweis: $V \cap \{A_x\}$ ist nicht leer und für jedes $z \in V \cap \{A_x\}$ gilt $x \in \overset{\circ}{A}_z$. Nach der bereits zitierten Eigenschaft von Absorptionsmengen ([6], 1.4.5) muß $h(z) = +\infty$ sein, denn sonst wäre $h(x) < +\infty$.

Nun können wir K_D für MH beweisen. Sei also U offen $\subset X_1 \times X_2$, o.B.d.A. sei $U = U_1 \times U_2$, und h die obere Einhüllende einer aufsteigenden Folge in $\text{MH}(U)$.

Gilt für $x \in U_1$ und V_2 offen $\subset U_2$

$$h = +\infty \text{ auf } \{x\} \times V_2,$$

so ist für ein reguläres Gebiet V_1 in U_1 mit $x \in V_1$ nach Lemma 5.10

für jedes $y \in V_2$ die Funktion

$$h(\cdot, y) = +\infty \quad \text{auf } V_1 \cap \left[A_x \right].$$

Also ist $h = +\infty$ auf der offenen Menge $(V_1 \cap \left[A_x \right]) \times V_2$ in $X_1 \times X_2$,
und damit ist h nicht endlich auf einer dichten Teilmenge von U .

Ist letzteres jedoch der Fall, so folgt, daß h auf einer dichten
Teilmenge jedes Schnittes der Form U_2 von U endlich ist. Vertauschen
der Rollen von X_1 und X_2 und Satz 5.9 liefern die Behauptung.

II. INTEGRALDARSTELLUNG POSITIVER MEHRFACH SUPERHARMONISCHER FUNKTIONEN

Nun soll am Beispiel der Integraldarstellung auf dem Kegel der positiven mehrfach superharmonischen Funktionen gezeigt werden, in welchem Ausmaß sich Techniken harmonischer Räume auf den Fall mehrerer Variabler übertragen lassen. Ein wesentlicher Schritt zur Integraldarstellung dieser Funktionen besteht in der Definition einer Topologie, für die der Kegel metrisierbar und schwach vollständig wird. Dann garantieren die Sätze von G. CHOQUET [12] die Existenz geeigneter Darstellungsmaße, die von den Extremalstrahlen des Kegels getragen werden. Diese Topologie soll hier wie im Fall der zugrunde liegenden harmonischen Räume mit Hilfe der Reduzierten definiert werden. Die Methode der Reduzierten geht zurück auf G. MOKOBODZKI [24], eine Darstellung für harmonische Räume mit dem Doobischen Konvergenzaxiom findet sich in [3].

Im folgenden seien wieder $(X_1, \mathcal{H}_1), \dots, (X_m, \mathcal{H}_m)$ harmonische Räume im Sinne von C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA [15], jetzt mit abzählbarer Basis und streng $(\mathcal{P})$ -harmonisch. MH_+^* (bzw. MS_+) bezeichne den Kegel der positiven m -hyperharmonischen (bzw. m -superharmonischen) Funktionen auf dem Produktraum X . Der Index i steht wieder für eine Zahl aus $\{1, \dots, m\}$, auf den Zusatz "für $i = 1, \dots, m$ " wird meist verzichtet. Zur Vorbereitung sollen zunächst die Reduzierten kurz vorgestellt werden.

§ 6. Reduzierte in harmonischen Räumen.

In diesem Paragraphen soll die von G. MOKOBODZKI stammende Methode des Reduzierens über stetigen Funktionen in harmonischen Räumen kurz und ohne Beweise dargestellt werden. Näheres findet man in [3] und [24]. Dabei wird das Reduzieren über Teilmengen des Grundraumes, eines der wichtigsten Instrumente der modernen Potentialtheorie, als bekannt vorausgesetzt.

Nur für diesen Paragraphen bezeichne $(X, \mathcal{H}^*)$ einen harmonischen Raum im Sinne von [15], der $\mathcal{P}$ -harmonisch ist, $\mathcal{H}_+^*$ bzw. $\mathcal{J}^+$ den zugehörigen Kegel positiver hyperharmonischer bzw. superharmonischer Funktionen auf X .

Definition 6.1: Sei $\phi \in \mathcal{C}_b^+(X)$ eine positive stetige beschränkte reelle Funktion auf X . Für $v \in \mathcal{H}_+^*$ heiße Reduzierte von v über ϕ die durch

$$R_v^\phi(x) := \int_0^{\sup \phi} R_v^{(\phi > \alpha)}(x) d\alpha$$

definierte Funktion auf X , wobei $R^{(\phi > \alpha)}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Reduzierte über der offenen Menge $(\phi > \alpha) := \{x \in X : \phi(x) > \alpha\} \subset X$ und da das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ ist.

Eigenschaften: Für alle $v \in \mathcal{H}_+^*$ gilt

- 1) $R_v^\phi \in \mathcal{H}_+^*$.
- 2) $0 \leq R_v^\phi \leq \sup \phi \cdot v$, $R_v^{\lambda \phi} = \lambda R_v^\phi$ für $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- 3) $\phi \leq \psi \implies R_v^\phi \leq R_v^\psi$ für $\phi, \psi \in \mathcal{C}_b^+(X)$.

$$4) \phi_n \uparrow \phi \implies \sup R_V^{\phi_n} = R_V^{\phi} \text{ für } \phi_n, \phi \in \mathcal{C}_b^+(X), n \in \mathbb{N}.$$

$$5) v \in \mathcal{J}^+ \implies R_V^{\phi} \in \mathcal{J}^+, \text{ harmonisch auf } T\phi, \text{ wobei } T\phi \text{ den}$$

Träger von ϕ bezeichnet.

6) Für jedes $x \in X$ definiert die Abbildung

$$v \mapsto R_V^{\phi}(x)$$

eine isotone affine Funktion auf $\mathcal{H}_+^*$. Für $x \in T\phi$ ist diese endlich auf $\mathcal{J}^+$.

7) Zu $\phi \in \mathcal{C}_b^+(X)$ und $x \in X$ existiert ein Radonmaß μ_x^{ϕ} auf $T\phi$, so daß für alle $v \in \mathcal{H}_+^*$ gilt

$$\int v \, d\mu_x^{\phi} = R_V^{\phi}(x).$$

μ_x^{ϕ} heiße zu ϕ und x gehoriges Maß. Wegen der Approximierbarkeit stetiger Funktionen durch Differenzen positiver Potentiale ist dieses Maß eindeutig bestimmt.

Der Vorteil dieser Begriffsbildung gegenüber den üblichen Reduzierten liegt in der folgenden Eigenschaft, deren Beweis die zugehörige Technik demonstriert:

Satz 6.2: Sei $v \in \mathcal{H}_+^*$, $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Folge in $\mathcal{K}_+(X)$, der Menge der positiven stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, deren untere Einhüllende ϕ in $\mathcal{K}_+(X)$ liegt. Dann gilt

$$R_V^{\phi} = \inf_{n \in \mathbb{N}} R_V^{\phi_n}.$$

Beweis: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha < \beta$. Nach dem Satz von Dini konvergiert die Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf X gegen ϕ . Also ist für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$ $\phi > \phi_n - (\beta - \alpha)$ und damit

$$(\phi > \beta) \subset (\phi_n > \beta) \subset (\phi > \alpha).$$

Hieraus folgt

$$R_V^{(\phi > \beta)} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} R_V^{(\phi_n > \beta)} \leq R_V^{(\phi > \alpha)}$$

Für jedes $x \in X$ ist die Funktion $\beta \rightarrow R_V^{(\phi > \beta)}(x)$ monoton fallend auf $\mathbb{R}_+$ und besitzt daher höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Für alle übrigen Werte von β gilt somit

$$R_V^{(\phi > \beta)}(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} R_V^{(\phi_n > \beta)}(x),$$

und dies ergibt die Behauptung.

Die folgenden Überlegungen zeigen, daß sich mit Hilfe solcher Reduzierten jede Funktion aus $\mathcal{H}_+^*$ punktweise darstellen läßt:

Definition 6.3: Sei $x \in X$, V eine relativ kompakte resolutive Umgebung von x mit $V^* \neq \emptyset$ und $\phi \in \mathcal{K}_+(X)$. Die Funktion ϕ heiße passend zu V und x , falls $x \in \text{Int } \phi$, $0 \leq \phi \leq 1$ und $V^* \subset \phi^{-1}(1)$ ist. Für $x \in X$ bezeichne

$$I_x := \{\phi \in \mathcal{K}_+(X) : \phi \text{ passend zu } V \text{ und } x \text{ für ein geeignetes } V\}.$$

Bemerkungen: 1) Zu $x \in X$ und einer relativ kompakten resolutiven Umgebung V von x mit $V^* \neq \emptyset$ existieren stets passende $\phi \in \mathcal{K}_+(X)$.

2) Sei ϕ passend zu V und x . Dann gilt für jedes $v \in \mathcal{H}_+^*$

$$\int_V d\mu_x^V = R_V^{(\phi > \alpha)}(x) \leq R_V^{(\phi > \alpha)}(x) \quad \text{für } 0 \leq \alpha < 1,$$

$$\text{also auch} \quad \int_V d\mu_x^V \leq R_V^\phi(x) \leq v(x).$$

$$\text{Hieraus folgt für } x \in X, v \in \mathcal{H}_+^* \quad \sup_{\phi \in I_x} R_V^\phi(x) = v(x).$$

3) Zwei Funktionen $u, v \in \mathcal{H}_+^*$ sind identisch, falls für alle $\phi \in \mathcal{K}_+(X)$ gilt

$$R_U^\phi(x) = R_V^\phi(x) \quad \text{auf } \text{Int } \phi.$$

§ 7. Reduzierte auf dem Produktraum.

Nun soll das Reduzieren in mehreren Variablen behandelt werden:

Satz 7.1: Sei $v \in MH_+^*$, $\phi_1 \in \mathcal{H}_+(X_1)$ und $x_1 \in X_1$, $\mu_1 = \mathcal{L}_{x_1}^{\phi_1}$ das zugehörige Radonmaß auf X_1 . Dann definiert

$$w(x_2, \dots, x_m) := \int v(x, x_2, \dots, x_m) d\mu_1(x)$$

eine positive m -hyperharmonische Funktion auf $X_2 \times \dots \times X_m$. Eine entsprechende Aussage gilt für alle anderen Indices $i = 2, \dots, m$.

Beweis: Es genügt, den Fall $X = X_1 \times X_2$ zu betrachten. Der Beweis überträgt sich direkt auf $m > 2$ Variable. Zunächst zeigen wir, daß die Funktion w mit

$$w(y) := \int v(x, y) d\mu_1(x)$$

nach unten halbetetig ist auf X_2 : Sei $y \in X_2$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X_2 mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Dann gilt nach dem Satz von Fatou

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} w(y_n) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int v(x, y_n) d\mu_1(x) \\ &> \int \liminf_{n \rightarrow \infty} v(x, y_n) d\mu_1(x) \\ &> \int v(x, y) d\mu_1(x) = w(y), \end{aligned}$$

also auch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} w(y_n) = w(y).$$

Nun sei V_2 resolutiv in X_2 und $x_2 \in V_2$. Dann ist nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int w d\mathcal{L}_{X_2}^{V_2} &= \int \int v(x, y) d\mu_1(x) d\mathcal{L}_{X_2}^{V_2}(y) \\ &= \int \int v(x, y) d\mathcal{L}_{X_2}^{V_2}(y) d\mu_1(x) \\ &\leq \int v(x, x_2) d\mu_1(x) = w(x, x_2), \end{aligned}$$

also $w \in \mathcal{H}_+^*$, und damit ist der Satz bewiesen.

Zusatz 7.2: Ist $v \in MS_+$, $\phi_1 \in \mathcal{K}_+(X_1)$ und $x_1 \in T\phi_1$, so ist die Funktion w aus Satz 7.1 sogar m -superharmonisch auf $X_2 \times \dots \times X_m$.

Beweis: Sei o.B.d.A. wieder $X = X_1 \times X_2$, μ_1 ... gehörige Maß. Für jedes $y \in X_2$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq w(y) &:= \int v(x, y) d\mu_1(x) = R_{v(\cdot, y)}^{\phi_1}(x_1) \\ &\leq \sup \phi_1 \cdot \int v(x, y) d\mu_{x_1}^{V_1}(x) := W(y) \end{aligned}$$

für jede in $T\phi_1$ resolute Umgebung V_1 von x_1 . Nach Voraussetzung ist für jede in X_2 resolute Menge V_2 die Funktion $(x, y) \rightarrow \int v d\mu_{(x, y)}^{V_1 \times V_2}$ m -harmonisch auf $V_1 \times V_2$, also insbesondere $y \rightarrow \int W d\mu_y^{V_2}$ harmonisch auf V_2 . Daher gilt $w, W \in \mathcal{S}_2^+$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Bezeichnungen ein: Es sei

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}_+(X_1) \times \dots \times \mathcal{K}_+(X_m),$$

und für $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \in \mathcal{K}$ bezeichne $D\phi := [T\phi_1 \times \dots \times T\phi_m]$ das "distinguierte Komplement" der Träger von $\phi_1, \dots, \phi_m$. $D\phi$ ist offen in X .

Definition 7.3: Sei $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \in \mathcal{K}$. Für jedes $v \in MH_+^*$ heiße die durch

$$x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto R^\phi[v](x) := \int v d\mu_{x_1}^{\phi_1} \otimes \dots \otimes \mu_{x_m}^{\phi_m}$$

auf X definierte numerische Funktion $R^\phi[v]$ Reduzierte von v über ϕ ,

wobei $\mu_{x_i}^{\phi_i}$ das zu ϕ_i und x_i gehörige Maß auf X_i bezeichnet. Wir schreiben auch kurz $\phi * v$ statt $R^\phi[v]$.

Eigenschaften: Für alle $v \in MH_+^*$ gilt:

- 1) $0 \leq R^\phi[v] \leq \sup \phi_1 \cdot \dots \cdot \sup \phi_m \cdot v$.
- 2) $R^\phi[v] \in MH_+^*$.

Durch $(m-1)$ malige Anwendung von Satz 7.1 erhält man eine hyperharmonische Funktion auf X_m , deren Reduzierte über ϕ_m wieder hyperharmonisch ist. Also ist $R^\phi[v]$ separat hyperharmonisch und damit aus MH_+^* nach Satz 4.3.

$$3) v \in MS_+ \implies R^\phi[v] \in MS_+, \text{ m-harmonisch auf } D\phi.$$

Letzteres sieht man wie in Satz 7.1 durch Anwendung der Sätze von Lebesgue und Fubini ein.

Wie im Fall harmonischer Räume läßt sich auch hier jede Funktion aus MH_+^* punktweise mit Hilfe solcher Reduzierten darstellen (vgl. § 6, Bemerkung 2).

Definition 7.4: Sei $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$, $V = V_1 \times \dots \times V_m$ eine m -resolutive Umgebung von x , $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \in \mathcal{K}$. Das m -Tupel ϕ heiße passend zu V und x , falls für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ϕ_i passend ist zu V_i und x_i . Weiter bezeichne für $x \in X$

$$I_x := \{\phi \in \mathcal{K} : \phi \text{ passend zu } V \text{ und } x \text{ für ein geeignetes } V\}.$$

Bemerkungen: 1) Ist $\phi \in \mathcal{K}$ passend zu V m -resolutiv und $x \in V$, so ist $x \in D\phi$. Weiter gilt für jedes $v \in MH_+^*$

$$\int_V d\mu_x^V \leq R^\phi[v](x) \leq v(x)$$

und damit nach Satz 4.2

$$\sup_{\phi \in I_x} R^\phi[v](x) = v(x).$$

2) Zwei Funktionen $u, v \in MH_+^*$ sind identisch, falls für alle $\phi \in \mathcal{K}$ gilt

$$R^\phi[u](x) = R^\phi[v](x) \quad \text{auf } D\phi.$$

§ 8. Die $\mathcal{T}$ -Topologie auf MS_+ .

Sei wie üblich $[MS_+]$ der Vektorverband der formalen Differenzen von Elementen aus MS_+ , MS_+ kanonisch eingebettet als positiver Kegel. Isotone affine Formen auf MS_+ lassen sich eindeutig zu positiven Linearformen auf $[MS_+]$ fortsetzen, insbesondere die Formen $v \longrightarrow R^\phi[v](x)$ mit $\phi \in \mathcal{K}$, $x \in X$ (vgl. [15], S. 285).

Für $\phi \in \mathcal{K}$ und K kompakt $\subset D\phi$ sei

$$\mathcal{V}(\phi, K) := \{v \in [MS_+] : \sup_{x \in K} |R^\phi[v](x)| \leq 1\}.$$

Endliche Durchschnitte von solchen Mengen $\mathcal{V}(\phi, K)$ bilden ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen für eine lokal konvexe Topologie $\mathcal{T}$ auf $[MS_+]$. Sie ist Hausdorffsch nach obiger Bemerkung 2 aus § 7. Im folgenden sei $[MS_+]$ stets mit dieser Topologie versehen.

Satz 8.1: MS_+ ist metrisierbar.

Beweis: Nach [15], Prop. 11.2.10 und dem Lemma von Prop. 7.2.1 existieren abzählbare Teilmengen $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{K}_+(X_i)$, so daß jede Funktion aus $\mathcal{K}_+(X_i)$ das Supremum einer aufsteigenden sowie das Infimum einer absteigenden Folge aus $\mathcal{F}_i$ ist. Sei

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_m.$$

Ferner sei $\mathcal{W}$ eine abzählbare Basis offener Mengen von X .

Endliche Durchschnitte von Mengen des Typs $\mathcal{V}(\phi, \bar{V})$ mit $\phi \in \mathcal{F}$, $V \in \mathcal{W}$ bilden ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen für eine lokal konvexe Topologie $\mathcal{T}_0$ auf $[MS_+]$. Da man in Bemerkung 2 aus

§ 7 die Menge $\mathcal{K}$ durch $\mathcal{F}$ ersetzen kann, ist $\mathcal{T}_0$ Hausdorffsch und daher metrisierbar. Ferner ist $\mathcal{T}_0$ gröber als $\mathcal{T}$.

Nun soll gezeigt werden, daß $\mathcal{T}_0$ auf MS_+ mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt. Seien dazu $v_0 \in MS_+$ und eine $\mathcal{T}$ -Nullumgebung $\mathcal{V}(\phi, K)$ in $[MS_+]$ mit $\phi \in \mathcal{K}$, K kompakt $\subset D\phi$ beliebig vorgegeben.

Approximiert man ϕ durch eine komponentenweise aufsteigende Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$, so konvergiert die aufsteigende Folge stetiger Funktionen $(\phi_n * v_0)_{n \in \mathbb{N}}$ auf K punktweise und nach dem Satz von Dini sogar gleichmäßig gegen $\phi * v_0$. Entsprechendes gilt bei Approximation von ϕ durch eine komponentenweise absteigende Folge aus $\mathcal{F}$ nach Satz 6.2.

Somit existieren $\xi, \psi \in \mathcal{F}$ mit den Eigenschaften $K \subset D\psi$, $\xi_1 \leq \phi_1 \leq \psi_1$ in allen Komponenten, ferner

$$\| \phi * v_0 - \xi * v_0 \|_K \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \| \phi * v_0 - \psi * v_0 \|_K \leq \frac{1}{2},$$

wobei $\| \cdot \|_K$ die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf K bedeutet. Genauer gilt also

$$\begin{aligned} \phi * v_0 - \frac{1}{2} &\leq \xi * v_0 \leq \phi * v_0 \\ &\leq \psi * v_0 \leq \phi * v_0 + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{auf } K.$$

Seien nun Mengen $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{W}$ gegeben, die eine Überdeckung von K mit $\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_n \subset D\psi$ bilden. Dann ist

$$\mathcal{W} := \mathcal{V}(2\xi, \bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_n) \cap \mathcal{V}(2\psi, \bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_n)$$

eine $\mathcal{T}_0$ -Nullumgebung in $[MS_+]$. Für alle $v \in MS_+$ mit $(v-v_0) \in \mathcal{W}$ gilt insbesondere

$$\|\xi * v - \xi * v_0\|_K \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \|\psi * v - \psi * v_0\|_K \leq \frac{1}{2}.$$

Mit den obigen Ungleichungen ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \phi * v_0 - 1 &\leq \xi * v_0 - \frac{1}{2} \\ &\leq \xi * v \leq \phi * v \leq \psi * v \\ &\leq \psi * v_0 + \frac{1}{2} \leq \phi * v_0 + 1 \end{aligned}$$

auf K und damit $\|\phi * v - \phi * v_0\|_K \leq 1$.

Also ist $(v-v_0) \in \mathcal{V}(\phi, K)$, und der Satz ist bewiesen.

Korollar 8.2: MS_+ besitzt eine abzählbare Basis.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß es in MS_+ eine abzählbare $\mathcal{T}_0$ -dichte Teilmenge gibt. Die Konstruktion einer solchen Menge läßt sich wörtlich aus [15], Prop. 11.2.10 übernehmen, wenn man nur statt der spezifischen Multiplikation die Reduzierte über ϕ und das distinguerte Komplement $D\phi$ einsetzt.

Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf MS_+ . Wir setzen

$$L(\mathcal{F}) := \sup_{F \in \mathcal{F}} \left(\inf_{v \in F} v \right).$$

Stets ist $L(\mathcal{F}) \in MH_+^*$. Sei nun $\phi \in \mathcal{K}$. Das Bild von $\mathcal{F}$ unter der Abbildung

$$v \longmapsto \phi * v := R^\phi[v] : MS_+ \longrightarrow MS_+$$

ist wieder ein Cauchy-Filter auf MS_+ , der mit $\phi * \mathcal{F}$ bezeichnet werde. Wieder gilt $L(\phi * \mathcal{F}) \in MH_+^*$.

Satz 8.3: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf MS_+ . Für jedes $\phi \in \mathcal{K}$, $x \in D\phi$ existiert $\lim_{v, \mathcal{F}} \phi * v(x)$. Weiter gilt für jedes $x \in X$

$$L(\mathcal{F})(x) = \sup_{\phi \in I_x} \lim_{v, \mathcal{F}} \phi * v(x).$$

Beweis: Die Abbildung $v \rightarrow R^\phi[v](x)$ ist stetig auf MS_+ . Da $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter ist, existiert $\lim_{v, \mathcal{F}} R^\phi[v](x)$ in $\mathbb{R}_+$.

Nunmehr sei $\phi \in I_x$, ϕ passend zu V m -resolutiv und $x \in V$. Ferner sei U eine offene relativ kompakte Umgebung von x mit $\bar{U} \subset V \cap D\phi$. $\mathcal{F}$ ist ein Cauchy-Filter, also gibt es ein $F \in \mathcal{F}$, so daß $F - F \subset \mathcal{U}(\phi, \bar{U})$ ist, also auch ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$ mit $F \subset \alpha \mathcal{U}(\phi, \bar{U})$. Damit ist

$$\{R^\phi[v]|_U : v \in F\}$$

eine gleichgradig stetige Menge m -harmonischer Funktionen auf U .

Also gilt

$$\int \widehat{\inf_{v \in F} v} d\mu_x^V \leq \inf_{v \in F} R^\phi[v](x) \leq \widehat{\inf_{v \in F} v(x)}$$

und somit

$$\int L(\mathcal{F}) d\mu_x^V \leq \lim_{v, \mathcal{F}} R^\phi[v](x) \leq L(\mathcal{F})(x)$$

und

$$L(\mathcal{F})(x) \leq \sup_{\phi \in I_x} \lim_{v, \mathcal{F}} R^\phi[v](x) \leq L(\mathcal{F})(x).$$

Korollar 8.4: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf MS_+ . Für jeden feineren Filter $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ auf MS_+ gilt

$$L(\mathcal{F}') = L(\mathcal{F}).$$

Beweis: $\mathcal{F}'$ ist ebenfalls ein Cauchy-Filter auf MS_+ . Also existiert $\lim_{v, \mathcal{F}'} \phi * v(x) = \lim_{v, \mathcal{F}} \phi * v(x)$ in $\mathbb{R}_+$ für jedes $\phi \in \mathcal{K}$, $x \in D\phi$. Satz 8.3 liefert nun die Behauptung.

Bemerkung: Korollar 8.4 besagt, daß jeder $\mathcal{T}$ -Cauchy-Filter auf MS_+ in der Topologie der Konvergenz im Graphen gegen $L(\mathcal{F})$ konvergiert. Diese Topologie ist im Fall harmonischer Räume mit dem Brelotschen oder Doobischen Konvergenzaxiom die geeignete Topologie zur Integraldarstellung positiver superharmonischer Funktionen (vgl. [3], [24]). Dabei wird an entscheidender Stelle die Technik der Referenzmaße verwendet, um auf lokal gleichmäßige Beschränktheit einer Menge harmonischer Funktionen zu schließen. Diese Technik steht in Räumen mit dem Bauerschen Konvergenzaxiom nicht zur Verfügung, weshalb die Möglichkeit, auf gleichmäßige Beschränktheit zu schließen, bereits in der Definition der Topologie $\mathcal{T}$ angelegt werden muß.

Satz 8.5: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf MS_+ und $\phi \in \mathcal{K}$. Dann ist $L(\phi * \mathcal{F})$ m-harmonisch auf $D\phi$, und der Filter $\phi * \mathcal{F}$ konvergiert lokal gleichmäßig auf $D\phi$ gegen $L(\phi * \mathcal{F})$.

Beweis: Sei K kompakt $\subset D\phi$ und U eine offene Umgebung von K mit $\bar{U}$ kompakt $\subset D\phi$. Da $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter ist, existiert ein $F \in \mathcal{F}$ mit

$$F - F \subset \mathcal{U}(\phi, \bar{U}).$$

Damit ist die Familie m -harmonischer Funktionen auf U

$$\{\phi * v|_U : v \in F\}$$

gleichmäßig beschränkt auf U , also gleichgradig stetig. Nach

Satz 8.3 existiert für jedes $x \in U$

$$\lim_{v, \mathcal{F}} \phi * v(x) = \lim_{u, \phi * \mathcal{F}} u(x),$$

und wegen der gleichgradigen Stetigkeit ist die Konvergenz sogar

gleichmäßig auf K . Ebenfalls aus der gleichgradigen Stetigkeit

ergibt sich für jedes $G \in \mathcal{F}$, $G \subset F$

$$\inf_{v \in G} \phi * v = \inf_{v \in G} \phi * v \quad \text{auf } U,$$

und damit

$$L(\phi * \mathcal{F}) = \sup_{G \in \mathcal{F} \cap F} (\inf_{v \in G} \phi * v) = \lim_{v, \mathcal{F}} \phi * v = \lim_{u, \phi * \mathcal{F}} u$$

auf K . Als lokal gleichmäßiger Limes m -harmonischer Funktionen

ist $L(\phi * \mathcal{F})$ m -harmonisch auf $D\phi$.

Die folgenden Überlegungen und Lemmata dienen der Vorbereitung des entscheidenden Satzes, der die Vollständigkeit von MS_+ besagt.

Für $i = 1, \dots, m$ seien offene Mengen $U_i \subset X_i$ und Punkte $x_i \in X_i$ gegeben. Das Reduzieren über U_i läßt sich durch die gefegten Maße $\epsilon_{x_i}^{U_i}$ beschreiben: Es gilt

$$R_{x_i}^{U_i}(x_i) = \int u \, d\epsilon_{x_i}^{U_i}$$

für alle $u \in \mathcal{H}_i^*$. Damit läßt sich auch für $v \in MH_+^*$ eine Reduzierte über $U_1, \dots, U_m$ definieren, nämlich die durch

$$x = (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow R^{U_1, \dots, U_m}[v](x) := \int v \, d\epsilon_{x_1}^{U_1} \otimes \dots \otimes \epsilon_{x_m}^{U_m}$$

gegebene numerische Funktion auf X . Es gelten analoge Eigenschaften

wie für die Reduzierten über ϕ aus § 7, nämlich

$$1) 0 \leq R^{U_1, \dots, U_m}[v] \leq v.$$

$$2) R^{U_1, \dots, U_m}[v] \in MH_+^*.$$

$$3) v \in MS_+ \implies R^{U_1, \dots, U_m}[v] \in MS_+, \text{ m-harmonisch auf } \bar{U}_1 \times \dots \times \bar{U}_m.$$

Ferner wird das Maß $\varepsilon_{x_1}^{U_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{x_m}^{U_m}$ von $U_1^* \times \dots \times U_m^*$ getragen.

Lemma 8.6: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf MS_+ , ferner seien

U_i, V_i offene relativ kompakte Mengen in X_i mit $\bar{U}_i \subset V_i$. Dann

gilt auf $\bar{V}_1 \times \dots \times \bar{V}_m$

$$R^{U_1, \dots, U_m}[L(\mathcal{F})] \leq \liminf_{v, \mathcal{F}} R^{U_1, \dots, U_m}[v]$$

$$\leq \limsup_{v, \mathcal{F}} R^{U_1, \dots, U_m}[v] \leq R^{V_1, \dots, V_m}[L(\mathcal{F})]$$

Beweis: Sei $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$ beliebig und $\mu := \varepsilon_{x_1}^{U_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{x_m}^{U_m}$.

Es gilt für jedes $F \in \mathcal{F}$

$$\int \inf_{v \in F} v \, d\mu \leq \inf_{v \in F} \int v \, d\mu$$

und

$$\int L(\mathcal{F}) \, d\mu \leq \sup_{F \in \mathcal{F}} \inf_{v \in F} \int v \, d\mu,$$

$$\text{d.h. } R^{U_1, \dots, U_m}[L(\mathcal{F})] \leq \liminf_{v, \mathcal{F}} R^{U_1, \dots, U_m}[v] \leq \limsup_{v, \mathcal{F}} R^{U_1, \dots, U_m}[v]$$

auf X .

Nunmehr sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter feiner als $\mathcal{F}$ auf MS_+ . Wir zeigen zunächst ein Analogon zu Satz 8.5: Die Funktion

$$H := \sup_{F \in \mathcal{U}} \left(\inf_{v \in F} R^{U_1, \dots, U_m}[v] \right)$$

aus MH_+^* ist m -harmonisch auf $D := [\bar{U}_1 \times \dots \times \bar{U}_m]$, und die Funktionenfamilie $\{R^{U_1, \dots, U_m}[v]\}$ konvergiert längs $\mathcal{U}$ lokal gleichmäßig auf D gegen H .

Sei dazu K kompakt $\subset D$, $W = W_1 \times \dots \times W_m$ eine offene Umgebung von K mit $\bar{W}_i$ kompakt $\subset [\bar{U}_i]$, ferner $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \in \mathcal{K}$ mit

$$\text{Rest}_{U_i} \phi_i = \sup \phi_i = 1$$

und $\bar{W}_i \subset T\phi_i$. Dann ist für alle $v \in MH_+^*$ $R^{U_1, \dots, U_m}[v] \leq R^\phi[v]$ auf X . Da $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter ist, existiert wieder ein $F \in \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, so daß die Familie

$$\{R^{U_1, \dots, U_m}[v] \big|_W : v \in F\}$$

m -harmonischer Funktionen auf W gleichmäßig beschränkt und damit gleichgradig stetig ist. Ferner existiert längs des Ultrafilters $\mathcal{U}$

$$\lim_{v, \mathcal{U}} R^{U_1, \dots, U_m}[v](x)$$

in $\mathbb{R}_+$ für jedes $x \in W$, und die Konvergenz ist wieder gleichmäßig auf K . Nun läßt sich wie im Beweis von Satz 8.5 weiterschließen.

Für alle $u \in {}_+\mathcal{H}_i^*$ gilt $R^{V_i}_{R_u^{U_i}} = R_u^{U_i}$ auf $[\bar{V}_i]$, und damit ist nach dem Satz von Fubini

$$R^{V_1, \dots, V_m} [R^{U_1, \dots, U_m}[v]] = R^{U_1, \dots, U_m}[v]$$

auf $[\bar{V}_1 \times \dots \times \bar{V}_m]$ für alle $v \in MH_+^*$.

Sei nun $x = (x_1, \dots, x_m) \in \bar{V}_1 \times \dots \times \bar{V}_m$ gegeben. Das Maß $\epsilon_{x_1}^{V_1} \otimes \dots \otimes \epsilon_{x_m}^{V_m}$ wird von $V_1^* \times \dots \times V_m^* \subset D$ getragen, und wegen der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$R^{V_1, \dots, V_m}[H](x) = \lim_{v, \mathcal{F}} R^{V_1, \dots, V_m}[R^{U_1, \dots, U_m}[v]](x) = H(x) .$$

Mit $H \leq L(\mathcal{U}) = L(\mathcal{F})$ nach Korollar 8.4 folgt also

$$\lim_{v, \mathcal{U}} R^{U_1, \dots, U_m}[v](x) = R^{V_1, \dots, V_m}[H](x) \leq R^{V_1, \dots, V_m}[L(\mathcal{F})](x) ,$$

und damit auch

$$\limsup_{v, \mathcal{F}} R^{U_1, \dots, U_m}[v](x) \leq R^{V_1, \dots, V_m}[L(\mathcal{F})](x) ,$$

da $\mathcal{U}$ ein beliebiger Ultrafilter feiner als $\mathcal{F}$ war.

Lemma 8.7: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf MS_+ , $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \in \mathcal{K}$.

Dann gilt für alle $x \in D\phi$

$$L(\phi * \mathcal{F})(x) = \phi * L(\mathcal{F})(x) .$$

Beweis: Sei $x = (x_1, \dots, x_m) \in D\phi$. Nach Satz 8.5 gilt

$$L(\phi * \mathcal{F})(x) = \lim_{v, \mathcal{F}} R^\phi[v](x) ,$$

also ist zu zeigen

$$\lim_{v, \mathcal{F}} R^\phi[v](x) = R^\phi[L(\mathcal{F})](x) .$$

Setzen wir für $\alpha_i \in [0, \sup \phi_i]$ $\mu^{\alpha_i} := \epsilon_{x_1}^{(\phi_i > \alpha_i)}$, das über

die Menge $(\phi_i > \alpha_i)$ gefegte Maß zu ϵ_{x_i} auf X_i , und bezeichnen mit Q den

Quader $Q := [0, \sup \phi_1] \times \dots \times [0, \sup \phi_m]$ in $\mathbb{R}^m$, so gilt nach

dem Satz von Fubini für $v \in MH_+^*$

$$\begin{aligned} R^\phi[v](x) &= \int \dots \int v \, d\mu_{x_1}^{\phi_1} \dots d\mu_{x_{m-1}}^{\phi_{m-1}} d\mu^{\alpha_m} d\alpha_m \\ &= \int \dots \int v \, d\mu^{\alpha_m} d\mu_{x_1}^{\phi_1} \dots d\mu_{x_{m-1}}^{\phi_{m-1}} d\alpha_m \\ &= \int \dots \int v \, d\mu^{\alpha_1} \dots d\mu^{\alpha_m} d\alpha_1 \dots d\alpha_m \\ &= \int_Q \int_X v \, d\mu^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \mu^{\alpha_m} d\lambda^m , \end{aligned}$$

wobei $\mu_{x_i}^{\phi_i}$ das zu ϕ_i und x_i gehörige Maß auf X_i und λ^m das Lebesgue-
maß auf $\mathbb{R}^m$ bedeutet. Setzen wir noch für $v \in MH_+^*$ und $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in Q$

$$R_V(\alpha_1, \dots, \alpha_m) := R^{(\phi_1 > \alpha_1), \dots, (\phi_m > \alpha_m)}[v](x),$$

so erhalten wir

$$R^{\phi}[v](x) = \int_Q R_V(\alpha_1, \dots, \alpha_m) d\lambda^m(\alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Nun läßt sich der Quader Q im euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ etwa
mittels der Diagonalehyperebene H durch die Punkte $(0, \dots, \sup \phi_1, \dots, 0)$
und eindimensionaler Schnitte senkrecht dazu in Faktoren zerlegen,
und für jeden eindimensionalen zu $a \in Q \cap H$ gehörigen Schnitt Q_a
von Q läßt sich eine geeignete Parametrisierung

$$\lambda \longrightarrow (\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_m(\lambda)) : [0, 1] \longrightarrow Q_a$$

wählen, so daß für alle $\lambda, \mu \in [0, 1]$ mit $\lambda < \mu$ gilt

$$\alpha_1(\lambda) \leq \alpha_1(\mu), \dots, \alpha_m(\lambda) \leq \alpha_m(\mu).$$

Für einen solchen Schnitt Q_a und für $v \in MH_+^*$ bezeichne R_V^a die
Abbildung

$$\lambda \longmapsto R_V^a(\lambda) := R_V(\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_m(\lambda))$$

von $[0, 1] \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$.

Da $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter ist, existieren wieder $F \in \mathcal{F}$ und $M > 0$,
so daß $R_V^a \leq M$ ist für alle $v \in F$ und alle $a \in Q \cap H$, und damit ist
auch $R_L^a(\mathcal{F}) \leq M$. Die Funktion $R_L^a(\mathcal{F})$ ist monoton fallend auf $[0, 1]$
und besitzt daher höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Für $\lambda, \mu \in [0,1]$ mit $\lambda < \mu$ setzen wir $U_i := \{\phi_i > \alpha_i(\mu)\}$ und $V_i := \{\phi_i > \alpha_i(\lambda)\}$, dann sind U_i und V_i offene, relativ kompakte Teilmengen von X_i mit $\bar{U}_i \subset V_i$, und die Voraussetzungen von Lemma 8.6 sind erfüllt. Es gilt also

$$R_{L(\mathcal{F})}^a(\mu) \leq \liminf_{v, \mathcal{F}} R_v^a(\mu) \leq \limsup_{v, \mathcal{F}} R_v^a(\mu) \leq R_{L(\mathcal{F})}^a(\lambda),$$

und damit konvergiert die Familie (R_v^a) längs $\mathcal{F}$ außerhalb einer höchstens abzählbaren Teilmenge von $[0,1]$ punktweise gegen $R_{L(\mathcal{F})}^a$, und das ergibt die Konvergenz der Integrale

$$\lim_{v, \mathcal{F}} \int_0^1 R_v^a(\lambda) d\lambda = \int_0^1 R_{L(\mathcal{F})}^a(\lambda) d\lambda$$

für alle $a \in Q \cap H$ nach dem Satz von Lebesgue, also gilt auch

$$\lim_{v, \mathcal{F}} \int_{Q \cap H} \int_0^1 R_v^a(\lambda) d\lambda da = \int_{Q \cap H} \int_0^1 R_{L(\mathcal{F})}^a(\lambda) d\lambda da,$$

wobei $d\lambda$ bzw. da das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^{m-1}$ bezeichnen.

Dies bedeutet aber

$$\lim_{v, \mathcal{F}} \int_Q R_v d\lambda^m = \int_Q R_{L(\mathcal{F})} d\lambda^m,$$

was zu zeigen war. Die Metrisierbarkeit von MS_+ wurde hier benötigt.

Satz 8.8: Sei $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter auf MS_+ . Dann gilt $L(\mathcal{F}) \in MS_+$ und $\mathcal{F}$ konvergiert gegen $L(\mathcal{F})$.

Beweis: Sei V m -resolutiv in X , $x_0 \in V$ und $\phi \in \mathcal{K}$ passend zu V und x_0 . Dann gibt es eine offene Umgebung U von x_0 in $V \cap D\phi$ mit

$$\int U L(\mathcal{F}) d\mu_x^V \leq R^\phi[L(\mathcal{F})](x) \leq L(\mathcal{F})(x)$$

auf U . Es ist aber nach Lemma 8.7 $R^\phi[L(\mathcal{F})] = L(\phi * \mathcal{F})$ m -harmonisch auf U , also $L(\mathcal{F}) \in MS_+$.

Zum Beweis der Konvergenz sei $\mathcal{U}(\phi, K)$ eine Nullumgebung in $[MS_+]$, also $\phi \in \mathcal{K}$, K kompakt $\subset D\phi$. Nach Satz 8.5 konvergiert der Filter $\phi*\hat{\mathcal{F}}$ gleichmäßig auf K gegen $L(\phi*\hat{\mathcal{F}})$, also gibt es ein $F \in \mathcal{F}$, so daß für alle $v \in F$ gilt

$$|\phi*v - L(\phi*\hat{\mathcal{F}})| \leq 1 \quad \text{auf } K.$$

Wegen Lemma 8.7 gilt damit

$$|\phi*v - \phi*L(\hat{\mathcal{F}})| = |\phi*v - L(\phi*\hat{\mathcal{F}})| \leq 1 \quad \text{auf } K,$$

also $v - L(\hat{\mathcal{F}}) \in \mathcal{U}(\phi, K)$ für alle $v \in F$, und damit ist die Konvergenz bewiesen.

Korollar 8.9: MS_+ ist vollständig in $[MS_+]$.

Nun kann man in der gleichen Weise fortfahren wie in der Theorie harmonischer Räume. Dies wird besonders illustriert durch den folgenden Satz mit Korollar, deren Beweise man wörtlich aus dem Buch von C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA [15], Prop. 11.2.9 und Cor. 11.2.3 übernehmen kann, wenn man nur statt der spezifischen Multiplikation die Reduzierte über ϕ und das distinguierete Komplement $D\phi$ einsetzt.

Satz 8.10: Auf jeder beschränkten Teilmenge von $[MS_+]$ stimmt die von $\mathcal{T}$ erzeugte uniforme Struktur mit der von der schwachen Topologie erzeugten überein.

Korollar 8.11: Jede beschränkte Teilmenge von MS_+ ist relativ kompakt. Insbesondere ist die abgeschlossene konvexe Hülle einer kompakten Menge in MS_+ kompakt.

Schließlich liefert ein Satz von C. CONSTANTINESCU [14],
der an der selben Stelle auch in harmonischen Räumen verwendet
wird, das gewünschte Resultat:

Satz 8.12: MS_+ ist schwach vollständig.

Beweis: Nur die Voraussetzungen des Satzes aus [14] sind nach-
zuprüfen.

Endliche Durchschnitte von Mengen

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\phi, K) := \{v \in [MS_+] : \sup_{x \in K} |R^\phi[v](x)| < 1\}$$

mit $\phi \in \mathcal{K}$ und K kompakt $\subset D\phi$ bilden ein Fundamentalsystem von
absolut konvexen, abgeschlossenen Nullumgebungen für die Topo-
logie $\mathcal{T}$ auf $[MS_+]$. Für $u, v \in \mathcal{V}$ und $w \in [u, v] := (u + MS_+) \cap (v - MS_+)$
gilt

$$u \leq w \leq v$$

und damit $w \in \mathcal{V}$ wegen der Isotonie der Funktion $R^\phi[\cdot](x)$. Das
bedeutet aber

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V} + MS_+) \cap (\mathcal{V} - MS_+),$$

also ist MS_+ ein normaler, vollständiger spitzer Kegel in $[MS_+]$.

Zu $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\phi, K)$ sei p_v das Minkowski-Funktional, E_v der normierte
Raum $[MS_+] / p_v^{-1}(0)$, $\tilde{E}_v$ seine Vervollständigung und ϕ_v die
kanonische Injektion $\phi_v : [MS_+] \rightarrow E_v$. Ferner sei zu $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\phi, K)$
eine offene, relativ kompakte Umgebung U von K mit $\bar{U} \subset D\phi$ gegeben
und $\mathcal{W} := \mathcal{V}(\phi, \bar{U})$ gesetzt. Dann gilt $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ und damit

$$p_v \leq p_w \text{ und } p_w^{-1}(0) \subset p_v^{-1}(0) .$$

Also läßt sich E_w kanonisch in E_v einbetten mittels $\Phi_{vw} : E_w \rightarrow E_v$.

Für jede beschränkte Menge $B \subset E_w$ ist die Menge

$$\{R^\phi(v)|_K : v \in \Phi_w^{-1}(B)\}$$

gleichgradig stetig auf K . Damit ist aber

$$\Phi_{vw}(B) = \Phi_v(\Phi_w^{-1}(B))$$

relativ kompakt in $\tilde{E}_v$, und damit der Satz bewiesen.

§ 9. Die Integraldarstellung.

Mit der Untersuchung der Topologie $\mathcal{T}$ auf MS_+ sind die wichtigsten Schritte zur Integraldarstellung der Funktionen aus MS_+ bereits getan. Die Sätze von G. CHOQUET lassen sich nun anwenden und liefern das gewünschte Resultat. Eine systematische Darstellung dieser Theorie findet man etwa in [12], § 30. Anschließend an die Formulierung der Integraldarstellung soll hier noch die Struktur der Extremalstrahlen von MS_+ kurz diskutiert werden.

Als konvexer spitzer Kegel, metrisierbar und schwach vollständig im lokal konvexen Hausdorff-Raum $[MS_+]$, ist MS_+ gut frisiert. D.h. zu jedem $v \in MS_+$ existiert ein Hut C von MS_+ mit $v \in C$. Die Extrempunkte von C sind gegeben durch

$$\varepsilon(C) = \{0\} \cup \{v \in C : p_C(v) = 1\} \cap MS_e,$$

wobei p_C das Minkowski-Funktional von C und MS_e die Menge der zu den Extremalstrahlen gehörenden Funktionen aus MS_+ bezeichnet. Ist $v \neq 0$, so kann der Hut C so gewählt werden, daß $p_C(v) = 1$ ist.

Nun läßt sich die Integraldarstellung formulieren:

Satz 9.1: Sei $v \in MS_+$ und C ein Hut von MS_+ mit $v \in C$. Dann existiert ein positives Radonmaß $\mu \in \mathcal{M}_+^1(C)$ der Masse 1 auf C , welches von $MS_e \cup \{0\}$ getragen wird, so daß für alle $x \in X$ gilt

$$v(x) = \int u(x) \, d\mu(u).$$

Beweis: Nach der Integraldarstellungs-Theorie von G. CHOQUET ist v der Schwerpunkt eines maximalen Radonmaßes $\mu \in \mathcal{M}_+^1(C)$, das von $\varepsilon(C)$ getragen wird. Für jede stetige Linearform L auf $[MS_+]$ gilt daher

$$L(v) = \int L(u) \, d\mu(u) ,$$

also insbesondere für $\phi \in \mathcal{K}$, $x \in D\phi$

$$R^\phi[v](x) = \int R^\phi[u](x) \, d\mu(u) .$$

Nach § 7 Bemerkung 1 gilt aber für jedes $x \in X$ und jedes $u \in MS_+$

$$u(x) = \sup_{\phi \in I_x} R^\phi[u](x) ,$$

d.h. die Punktauswertung ist auf MS_+ das Supremum einer Familie stetiger Linearformen. Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} v(x) &= \sup_{\phi \in I_x} \int R^\phi[u](x) \, d\mu(u) \\ &= \int \sup_{\phi \in I_x} R^\phi[u](x) \, d\mu(u) = \int u(x) \, d\mu(u) , \end{aligned}$$

und der Satz ist bewiesen.

Bemerkungen: 1) Ist $v \neq 0$ und $p_C(v) = 1$, so wird das Darstellungsmaß μ von $\varepsilon(C) \setminus \{0\} \subset MS_e$ getragen.

2) Die Frage, ob MS_+ ein Verbandskegel und damit das Darstellungsmaß μ von $v \in MS_+$ bezüglich eines vorgegebenen Hutes C mit $v \in C$ eindeutig bestimmt ist, steht noch offen. K. GOWRISANKARAN [21] vermutet, daß dies nicht der Fall ist.

Eine erste, naheliegende Antwort auf die Frage nach den Extremalstrahlen von MS_+ liefert der folgende Satz:

Satz 9.2: Für jedes $i = 1, \dots, m$ sei e_i eine auf einem Extremalstrahl von Σ_1^+ gelegene Funktion und $e := e_1 \otimes \dots \otimes e_m$. Dann ist $e \in MS_+$.

Beweis: Es genügt, den Fall $m=2$, also $X = X_1 \times X_2$ zu betrachten. Nach Definition eines Strahls gilt $e_i \neq 0$ für $i = 1, 2$, also auch $e \neq 0$. Für $u, v \in MS_+$ mit $u+v = e$ ist noch $v = \alpha \cdot e$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ zu zeigen. Dabei kann man sich wegen $0 < v \leq e$ auf die nicht leere Menge $\{e > 0\} \subset X$ beschränken.

Sei also $(x, y) \in \{e > 0\}$. Die Funktion $e_2(y) \cdot e_1 = u(\cdot, y) + v(\cdot, y)$ liegt auf einem Extremalstrahl von Σ_1^+ , also gilt

$$v(\cdot, y) = \alpha_y \cdot e_2(y) \cdot e_1$$

für eine geeignete Konstante $\alpha_y \in \mathbb{R}_+$. Ebenso gibt es ein $\alpha_x \in \mathbb{R}_+$ mit

$$v(x, \cdot) = \alpha_x \cdot e_1(x) \cdot e_2.$$

Wegen $\alpha_x \cdot e(x, y) = v(x, y) = \alpha_y \cdot e(x, y)$ folgt hieraus $\alpha_x = \alpha_y$ für alle $(x, y) \in \{e > 0\}$.

Nunmehr sei $x \in \{e_1 > 0\}$ und $y, z \in \{e_2 > 0\}$. Dann sind $(x, y), (x, z) \in \{e > 0\}$, und damit gilt $\alpha_y = \alpha_x = \alpha_z$. Dies beweist $v = \alpha \cdot e$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Das folgende Beispiel von A. DRINKWATER und C. HERZ ([17a], Th. 4.3) zeigt jedoch, daß MS_+ i.a. weit mehr Extremalstrahlen besitzt, als nur die von Funktionen des Typs $e_1 \otimes \dots \otimes e_m$ aus Satz 9.2 erzeugten:

Beispiel: Sei $(X_1, \mathcal{H}_1) = (X_2, \mathcal{H}_2)$ der Brelotsche harmonische Raum $]0,1[\subset \mathbb{R}$ versehen mit dem Garbendatum der affin-linearen Funktionen (vgl. [6], § 2 Standard-Beispiel (1)). Die Funktion

$$(x,y) \longrightarrow v(x,y) := \inf \{x+y, 1-x, 1-y\}$$

auf $]0,1[^2$ liegt auf einem Extremalstrahl von MS_+ , ist aber nicht vom Typ $e_1 \otimes e_2$ aus Satz 9.2.

Eine genaue Beschreibung aller Extremalstrahlen von MS_+ kann bis jetzt nicht gegeben werden (vgl. K. GOWRISANKARAN [21]). Das Beispiel vermittelt den Eindruck, daß der Kegel MS_+ sehr viele Extremalstrahlen komplizierter Natur besitzt, was auch für die Vermutung spricht, daß kein Verbandskegel vorliegt.

K. GOWRISANKARAN [20] hat daher eine Teilklasse von MS_+ untersucht, die einen Verbandskegel darstellt und deren Extremalstrahlen sich vollständig beschreiben lassen: Es sind gerade die Funktionen aus Satz 9.2.

Für Produkte von Standard-Prozessen wurde bereits 1968 von R. CAIROLI [11] eine Integraldarstellung der entsprechenden Funktionenklasse gegeben. Er kennzeichnete sie als diejenigen separat exzessiven Funktionen, welche ein Darstellungsmaß besitzen, das vom Produkt der Martin-Kompaktifizierungen der zugrundeliegenden Räume getragen wird. Auf Grund des obigen Beispiels ist klar, daß für Produkte harmonischer Räume die entsprechenden Funktionen eine echte Teilklasse von MS_+ bilden müssen.

Symbolverzeichnis

Soweit nicht eigens eingeführt, werden Bezeichnungen und Notation aus [6] und [15] übernommen. In der Regel werden Symbole jedoch bei ihrem ersten Auftreten kurz erklärt. Auf die entsprechende Seite wird hier verwiesen.

X_i	11	$(\phi > \alpha)$	41
$\mathcal{H}_i^*, \mathcal{H}_i$	11	$T\phi$	42
X	11	μ_x^ϕ	42
i	12	$\mathcal{K}_+(X)$	42
MH	12	I_x	43, 46
$\mathcal{C}(U)$	12	$\mathcal{K}$	45
$\mu_x^V, \mu_{x_i}^{V_i}$	16	$D\phi$	45
dV	16	$R^\phi[v]$	45
M_f^V	17	$\phi * v$	45
$h _V$	18	$[MS_+]$	47
MH^*	21	$\mathcal{V}(\phi, K)$	47
$\mathcal{H}_i^*$	21	$\mathcal{T}$	47
$\hat{v}$	26	$L(\mathcal{F})$	47
MS	30	$\phi * \mathcal{F}$	47
$\mathcal{J}_i^+$	31	$R^{U_1, \dots, U_m}[v]$	50
MH_+^*, MS_+	40	MS_e	61
$\mathcal{C}_b^+(X)$	41	$\varepsilon(C)$	61
R_v^ϕ	41	$\mathcal{M}_+^1(C)$	61

LITERATUR

- [1] V. AVANISSIAN *Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques.* Ann. Sci. E.N.S., t. 78 (1961), 101-161.
- [2] - *Sur l'harmonicité des fonctions séparément harmoniques.* Séminaire de Probabilités I, Lecture Notes in Mathematics 39, 3-17, Springer, Berlin 1967.
- [3] T. BARTH *Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des réduites.* Séminaire de Théorie du Potentiel, 14e-15e années, 1970-1972, n°26, 9 p.
- [4] H. BAUER *Minimalstellen von Funktionen und Extrempunkte II.* Arch. Math. 11 (1960), 200-205.
- [5] - *Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen.* Math. Ann. 146, 1-59 (1962).
- [6] - *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie.* Lecture Notes in Mathematics 22, Springer, Berlin 1966.
- [7] N. BOURBAKI *Topologie Générale, Chap. X.* Act. Sci. et Ind. 1084, Hermann, Paris 1961.
- [8] M. BRELOT *Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact.* Séminaire de Théorie du Potentiel 2 (1958), n°1, 40 p.
- [9] H.J. BREMERMAN *On a Generalized Dirichlet Problem for Plurisubharmonic Functions and Pseudo-Convex Domains.* Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 246-276.
- [10] R. CAIROLI *Produits de semi-groupes de transition et produits de processus.* Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, vol. 15 (1966), 311-384.
- [11] - *Une représentation intégrale pour fonctions séparément excessives.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1 (1968), 317-338.

- [12] G. CHOQUET *Lectures on Analysis, Vol. II.* Benjamin, New York 1969.
- [13] C. CONSTANTINESCU *A Topology on the Cone of Non-Negative Superharmonic Functions.* Rev. Roumaine des Math. Pures et Appl. 10 (1965), 1331-1348.
- [14] - *L'ensemble des fonctions surharmoniques positives sur un espace harmonique est faiblement complet.* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 271, 549-551 (1970).
- [15] C. CONSTANTINESCU - A. CORNEA *Potential Theory on Harmonic Spaces.* Springer, Berlin 1972.
- [16] J.L. DOOB *Probability Methods Applied to the First Boundary Value Problem.* Proc. of the 3rd Berkeley Symposium, Vol. II, 49-80, Berkeley 1956.
- [17] A. DRINKWATER-ROBERTS *Integral Representation for Multiply Superharmonic Functions.*
a) Ph.D. Thesis, McGill University, Montreal 1972.
b) Math. Ann. 215, 69-78 (1975).
- [18] D. FEYEL - A. de La PRADELLE *Principe du minimum et préfaisceaux maximaux.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24, 1 (1974), 1-11.
- [19] K. GOWRISANKARAN *Multiply Harmonic Functions.* Nagoya Math. J. 28 (1968), 27-48.
- [20] - *Integral Representation for a Class of Multiply Superharmonic Functions.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23, 4 (1973), 105-143.
- [21] - *Multiply Superharmonic Functions.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 25, 3 (1975), 235-244.
- [22] R.M. HERVE *Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 12 (1962), 415-571.

- [23] P. LELONG *Les fonctions plurisousharmoniques.* Ann. Sci. E.N.S., t. 62 (1945), 301-338.
- [24] G. MOKOBODZKI *Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des réduites.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15, 1 (1965), 103-112.
- [25] J.B. WALSH *Probability and a Dirichlet Problem for Multiply Superharmonic Functions.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 2 (1968), 221-279.

Lebenslauf

Am 29. Mai 1946 wurde ich, Thomas Barth, in Kleinmachnow bei Berlin geboren. Meine Eltern sind Dr. Ludwig Barth, Arzt, und Frau Maria Barth, geborene Löhr.

Nach dem Besuch mehrerer Volksschulen, zuletzt in Erlangen, trat ich 1956 in das Gymnasium Fridericianum Erlangen über, wo ich 1965 das Reifezeugnis erhielt.

Im Wintersemester 1965/66 begann ich das Studium von Mathematik und Physik an der Universität Erlangen-Nürnberg als Stipendiat des Bayerischen Staates. Hier legte ich 1967 die Diplom-Vorprüfung in beiden Fächern ab. Von Oktober 1968 bis September 1971 studierte ich an der Faculté des Sciences der Universität Paris, später der Universität Paris VI weiter, insbesondere Funktionalanalysis bei den Herren Professoren G. Choquet, E. Effros, R. Phelps und Potentialtheorie bei M. Brelot und G. Mokobodzki. Hier erwarb ich 1970 das Diplôme d'Etudes Approfondies de Mathématiques Pures mit einer Arbeit über Integraldarstellung superharmonischer Funktionen bei G. Mokobodzki.

Zum Wintersemester 1971/72 kehrte ich nach Erlangen zurück. Als Doktorand bei Herrn Professor Dr. H. Bauer und Stipendiat nach dem Graduiertenförderungsgesetz begann ich 1972 eine Arbeit über Integraldarstellung mehrfach superharmonischer Funktionen. In den Jahren 1975 und 1976 beschäftigte ich mich mit einem anderen Thema. Während dieser Zeit hörte ich Vorlesungen u.a. bei den Herren Professoren H. Bauer, H. Berens, H. Föllmer, D. Kölzow, P. Lorenzen, M. Métivier, M. Nagasawa und J.C. Taylor.

Seit Oktober 1971 bin ich am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg als wissenschaftliche Hilfskraft tätig. Im Wintersemester 1976/77 verwaltete ich die Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten.

